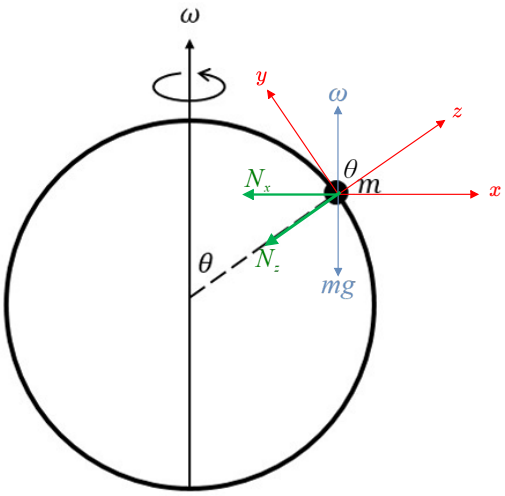
תשובות למבחן מספר 60: סמסטר 2023א' 16 בפברואר 2023, שאלון 415 מועד 67

שאלה 1



ראשית נשרטט מערכת מקומית בהתאם לנתוני השאלה מהאיור במערכת המקומית שלנו.

ביטוי לוקטור המהירות הזוויתית הינו:

$$\vec{\omega} = \omega \sin\theta\,\hat{y} + \omega\cos\theta\,\hat{z}$$

ביטוי לוקטור המהירות ביחס למערכת המסתובבת:

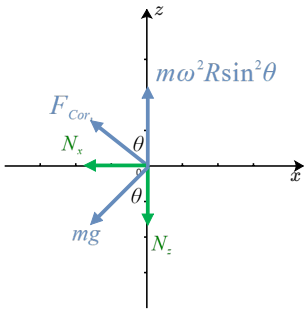
$$\vec{V}_{rot} = -v\hat{y} = -R\omega_\theta\hat{y} = -R\dot{\theta}\hat{y}$$

א. נחשב את כוח קוריוליס בנקודה כפי שמופיע באיור:

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}_{rot} = -2m\cdot\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & \omega\sin\theta & \omega\cos\theta\\ 0 & -R\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{Cor} = -2mR\omega\cos(\theta)\,\dot{\theta}\hat{x}$$

וכיוונו מחוץ למישור הדף.



ב. כדי למצוא את הכוח הנורמלי הפועל על החרוז, ראשית עלינו לנתח את הכוחות הפועלים על החרוז בכיוונים השונים, מסעיף א' ראינו כי כוח קוריוליס פועל בציר $\hat{x}$ שקבענו, נמצא את כוח הכבידה ואת הכוח הצנטריפוגלי ונשרטט בהתאם מטעמי נוחות ומכך נמצא את כוח הנורמאל המבוקש:

$$\vec{F}_g = -mg\sin\theta\,\hat{y} - mg\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{F}_C = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{rot}) = -m\vec{\omega}\times\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & \omega\sin\theta & \omega\cos\theta\\ 0 & 0 & R\end{vmatrix} = -m\vec{\omega}\times(\omega R\sin\theta\,\hat{x}) =$$

$$= -m\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & \omega\sin\theta & \omega\cos\theta\\ \omega R\sin\theta & 0 & 0\end{vmatrix} = m\omega^2R\sin^2\theta\,\hat{z} - m\omega^2R\sin\theta\cos\theta\,\hat{y}$$

אי לכך בנקודה כמשורטט באיור כוח הנורמאל נמצא במישור xz (מסתובב במהירות זוויתית ω סביב ציר אנכי, ראו איור), לכן גודל כוח הנורמאל יהיה גודל הרכיבים של ציר x ו-z ונקבל:

$$|N| = \sqrt{\left(-2mR\omega\cos(\theta)\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(m\omega^2R\sin^2\theta - mg\cos\theta\right)^2}$$

ג. נכתוב את משוואת התנועה בציר המשיקי, ציר $\hat{y}$ ומתקיים:

$$\sum F_y = -m\omega^2R\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta = -m\ddot{\theta}R \Rightarrow \ddot{\theta} = \omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta \quad A = \omega^2 \quad B = \frac{g}{R}$$

ד. מכך שהסטייה קטנה, נבצע קירוב לזוויות קטנות בעזרת סכום של זווית כך שמתקיים:

$$\sin(\pi + x) = \sin\pi\cos x + \cos\pi\sin x \approx -x \quad \cos(\pi + x) = \cos\pi\cos x - \sin\pi\sin x \approx -1$$

נקבל את משוואת התנועה לאחר קירוב:

$$\ddot{x} = \omega^2 x - \frac{g}{R}x \Rightarrow \ddot{x} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)x$$

מהנתון נקבל ש-$\frac{g}{R} - \omega^2 > 0$ לכן קיבלנו תנועה הרמונית שתדירותה היא:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$$

שאלה 2

א. מהנתון מציינים שהוא נעצר רגעית בנקודה A ששם הקפיץ רפוי, לכן האמפליטודה תהיה:

$$g-\frac{k}{2m}y_{\text{ש"מ}}=0\Rightarrow A=y_{\text{ש"מ}}=\frac{2mg}{k}$$

ב. נכתוב את משוואת התנועה:

$$(1)\begin{cases}g-\frac{k}{2m}y=\ddot{y}\\ g-\frac{k}{2m}y_{\text{ש"מ}}=0\end{cases}\overset{\text{חיסור}}{\Longrightarrow}-\frac{k}{2m}(y-y_{\text{ש"מ}})=\ddot{y}$$

הסטייה מנקודת שיווי המשקל:

$$(2)\ y'=y-y_{\text{ש"מ}}\Rightarrow\dot{y}'=\dot{y}\Rightarrow\ddot{y}'=\ddot{y}$$

ממשוואות (1) ו-(2) נקבל את משוואת התנועה ואת תדירות התנודות:

$$\ddot{y}'=-\frac{k}{2m}y'\quad\omega=\sqrt{k/2m}$$

ג. נשים לב כי זוהי התנגשות פלסטית, לכן נצטרך לפצל למקטעים שונים בהתאם;
משימור תנע קווי מתקיים:

$$mv_{\text{קליע}}=2mu\Rightarrow u_{\text{פגיעה}}=\frac{v_{\text{קליע}}}{2}$$

נרצה לבצע שיקולי אנרגיה, לכן נרצה לקבוע מישור ייחוס גובה ולדעת באיזה גובה הקפיץ עם המסה בלי הקליע היה לפני הפגיעה וגם היחס למצב הרפוי. משיקול של סעיף א' נקבל שהוא היה בגובה:

$$\frac{mg}{k}$$

משימור אנרגיה (לאחר ההתנגשות), נקבע מישור ייחוס גובה רגעית אחרי ההתנגשות מתקיים:

$$\frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{v_{\text{קליע}}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=2mg\left(\frac{2mg}{k}-\frac{mg}{k}\right)\Rightarrow v_{\text{קליע}}=\sqrt{\frac{6m}{k}}g$$

ד. מסעיף א' וביחס לראשית הפתרון למשוואה הוא מהצורה:

$$y(t)=\frac{2mg}{k}\sin(\omega t+\phi)-\frac{2mg}{k}\quad v(t)=\omega\cdot\frac{2mg}{k}\cos(\omega t+\phi)$$

נציב את תנאי ההתחלה ביחס לראשית:

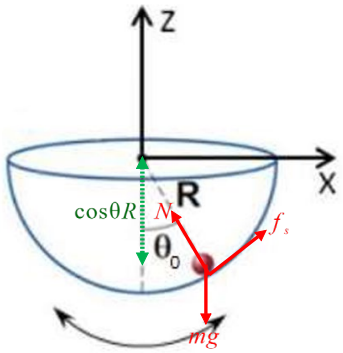
$$\begin{cases}y(0)=-\frac{mg}{k}=\frac{2mg}{k}\sin(\phi)-\frac{2mg}{k}\Rightarrow\sin\phi=\frac{1}{2}\\ v(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6m}{k}}g=\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot\frac{2mg}{k}\cos(\phi)\Rightarrow\cos\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{6}$$

נקבל את הפתרון למשוואה ביחס לראשית המבוקשת:

$$y(t)=\frac{2mg}{k}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2mg}{k}$$

שאלה 3

נשרטט איור בהתאם לנתוני השאלה ונבחר את **הכיוון החיובי נגד כיוון השעון**



א. משימור אנרגיה כאשר מישור ייחוס הגובה בתחתית הקערה מתקיים:

$$mg(R-\cos\theta_0 R)=mg(R-\cos\theta R)+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2\Rightarrow v^2+\frac{1}{m}\left(\frac{2}{5}mb^2\right)\cdot\frac{v^2}{b^2}=2gR(\cos\theta-\cos\theta_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{7}{5}v^2=2gR(\cos\theta-\cos\theta_0)\Rightarrow v=\sqrt{\frac{10}{7}gR(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$

ב. נכתוב את משוואת התנועה בציר הרדיאלי ביחס למערכת אינרציאלית ונקבל:

$$\sum F_r=N-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow N=mg\left(cos\theta+\frac{10}{7}(\cos\theta-\cos\theta_0)\right)\Rightarrow N=mg\left(\frac{17}{7}\cos\theta-\frac{10}{7}\cos\theta_0\right)$$

$$N=mg\left(\frac{17}{7}\cos\theta-\frac{10}{7}\cos\theta_0\right)\quad A=\frac{17}{7}\quad B=\frac{10}{7}$$

ג. נכתוב את משוואת התנועה בציר המשיקי ונקבל:

$$\sum F_\theta=mg\sin\theta-f_s=m\alpha b\quad\sum\tau=bf_s=I\alpha=\frac{2}{5}mb^2\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{5}{2mb}f$$

אי לכך מתקיים:

$$mg\sin\theta-f_s=m\frac{5}{2mb}fb\Rightarrow\frac{7}{2}f_s=mg\sin\theta\quad f_s=\frac{2}{7}\cdot mg\sin\theta\quad D=\frac{2}{7}$$

ד. נדרוש שיתקיים חיכוך סטטי מקסימלי ומתקיים:

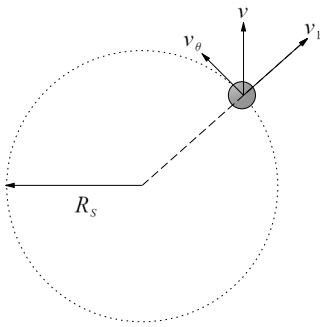
$$f_{s,max}=\mu_sN\quad f_s\le\mu_sN$$

נקבל אפוא:

$$\frac{2}{7}\cdot mg\sin\theta\le\mu_smg\left(\frac{17}{7}\cos\theta_0-\frac{10}{7}\cos\theta_0\right)\Rightarrow\mu_s=\frac{2}{7}\tan\theta_0$$

שאלה 4

נשרטט איור בהתאם לנתוני השאלה



א. האנרגיה הכוללת של כוכב הלכת היא:

$$(1)\ E_0 = \frac{1}{2}mv_\theta^2 - \frac{GMm}{R_S}$$

מחוק שני של ניוטון לתנועה מעגלית מתקיים:

$$(2)\ -\frac{GMm}{R_S^2} = m\frac{v_\theta^2}{R_s} \Rightarrow -\frac{GMm}{R_S} = mv_\theta^2$$

ממשוואות (1) ו-(2) נקבל:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_\theta^2 - mv_\theta^2 \Rightarrow v_\theta = \sqrt{-\frac{2E_0}{m}} \quad E_0 < 0 \text{ מסלול אליפטי}$$

ב. האנרגיה הכוללת של הכוכב אחרי המכה, תהיה לו שם מהירות משיקית ורדיאלית, נצטרך לעבוד עם גודל המהירות מרכיבים אלו ונדגיש כי **אחרי המכה האנרגיה קבועה והכוח היחיד שפועל הוא כוח משמר** וממשוואה (1) מתקיים:

$$E_{\text{אחרי המכה}} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{v_\theta^2 + v_1^2}\right)^2 - \frac{GMm}{R_S} = \frac{1}{2}mv_\theta^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R_S} \overset{(1)}{=} E_0 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

ג. התנע הזוויתי של הכוכב אחרי המכה, זהה לתנע הזוויתי של הכוכב לפני המכה, מכיוון ששקול המומנטים מתאפס, כי מדובר בכוח מרכזי שיוצא ממרכז. נרצה לבטא את רדיוס השמש באמצעות הנתונים בלבד, לכן מאנרגיה כוללת של גוף במסלול אליפטי וכאן מקרה פרטי של מעגל, לכן חצאי הציר שווים ומתקיים:

$$(3)\ E_0 = -\frac{GMm}{2R_S} \Rightarrow R_S = -\frac{GMm}{2E_0}$$

משימור תנע זוויתי, נמצא את התנע הזוויתי לפני המכה שיהיה שווה לאחרי המכה:

$$(4)\ J = mv_\theta R_S \overset{(3)}{=} m\sqrt{-\frac{2E_0}{m}} \cdot -\frac{GMm}{2E_0} = -\frac{GMm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-2E_0}}$$

ד. נעזר בפיתוח של סעיף ב' ונדרוש כי האנרגיה תהיה קטנה מאפס וזאת לפי האקסצנטריות ונקבל:

$$E_0 + \frac{1}{2}mv_1^2 < 0 \Leftrightarrow v_1 < \sqrt{-\frac{2E_0}{m}}$$

ה. ממשוואת האליפסה ידוע כי $0 \le e < 1$, מסלול אליפטי הוא אליפסה או מקרה פרטי שזה מעגל; לכן הזווית שתקנה לנו את הרדיוס המקסימלי הינה אפס והזווית שתקנה לנו את הרדיוס המינימלי הינה היא π ומתקיים:

$$(5)\ r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta} \Rightarrow\ r_{max} = a(1+e) \quad r_{min} = a(1-e)$$

נחשב את חצי הציר של האליפסה (או מעגל מקרה פרטי) ונקבל:

$$(6)\ E_0 + \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow a = \frac{-GMm}{2E_0 + mv_1^2} \Rightarrow a = \frac{GMm}{-2E_0 - mv_1^2} \overset{\text{סעיף ד}}{>} 0$$

נחשב את האקסצנטריות בעזרת האנרגיה והתנע הזוויתי שמצאנו לעיל:

$$(7)\ e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^2m^3}} = \sqrt{1 + \frac{2\left(E_0 + \frac{1}{2}mv_1^2\right)\left(-\frac{GMm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-2E_0}}\right)^2}{G^2M^2m^3}} = \sqrt{1 + \frac{2\left(E_0 + \frac{1}{2}mv_1^2\right)\left(\frac{G^2M^2m^3}{-2E_0}\right)}{G^2M^2m^3}} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2E_0 + mv_1^2}{-2E_0}} = \sqrt{\frac{mv_1^2}{-2E_0}}$$

ממשוואות (5), (6) ו-(7) נקבל את המבוקש:

$$r_{max} = \frac{GMm}{-2E_0 - mv_1^2}\left(1 + \sqrt{\frac{mv_1^2}{-2E_0}}\right) \quad r_{min} = \frac{GMm}{-2E_0 - mv_1^2}\left(1 - \sqrt{\frac{mv_1^2}{-2E_0}}\right)$$

שאלה 5

א. נשווה בין שתי הדרכים ונקבל את הזמן ביחס לכדור-הארץ:

$$\frac{4}{5}c\cdot t_1 = L_2 + \frac{3}{5}c\cdot t_1 \Rightarrow \frac{1}{5}c\cdot t_1 = L_2 \Rightarrow t_1 = 5\frac{L_2}{c}$$

ביחס לחללית B המערכת כעת היא המערכת העצמית שבה קורה המאורע ולכן שם נמצא הזמן העצמי ומהתארכות הזמן במערכת כדור-הארץ נקבל את המבוקש:

$$t'_{B,1} = \frac{t_1}{\gamma} = t_1\cdot\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = 3\frac{L_2}{c}$$

ב. נבדוק באיזה זמן ביחס לכדור-הארץ חללית A תגיע לתחנת החלל:

$$L_1 = L_2 + \frac{3}{5}c\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{5}{3}\frac{(L_1-L_2)}{c}$$

מטרנספורמציית לורנץ נמצא את הזמן ביחס לחללית B שמאורע זה קורה:

$$t'_{B,2} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}\left(t_2 - \frac{\frac{4}{5}c\cdot L_1}{c^2}\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{5}{3}\frac{(L_1-L_2)}{c} - \frac{4}{5}\frac{L_1}{c}\right) = \frac{13}{9}\frac{L_1}{c} - \frac{25}{9}\frac{L_2}{c}$$

כעת נקבל את המבוקש:

$$x'_{B,2} = \frac{4}{5}c\cdot\left(\frac{13}{9}\frac{L_1}{c} - \frac{25}{9}\frac{L_2}{c}\right) = \frac{52}{45}L_1 - \frac{20}{9}L_2$$

ג. ראשית נבדוק את המהירות היחסית בין A ל-B ביחס למערכת B:

$$V'_x = \frac{V_x - v_x}{1-\frac{V_x\cdot v_x}{c^2}} = \frac{\frac{3}{5}c - \frac{4}{5}c}{1-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}} = -\frac{5}{13}c$$

המערכת העצמית של המאורע היא שוב חללית B, נסיק כי אורך החללית היא האורך העצמי שבמערכת העצמית האורך הוא הארוך ביותר, לכן מהתקצרות האורך נקבל את המבוקש:

$$L'_3 = L_3\cdot\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}L_3$$

ד. נשים לב כי משוגר פוטון מחללית B לעבר כדור הארץ בזמן גדול מאפס כלומר המהירות תהיה בכיוון מנוגד ולכן התנע יהיה בסימן שלילי:

$$P_{x,B} = -\frac{E}{c}$$

מטרנספורמציה לאנרגיה נקבל את המבוקש:

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}}\left(E - \left(-\frac{5}{13}c\right)\cdot\left(-\frac{E}{c}\right)\right) = \frac{2}{3}E$$