פתרון מבחן מספר 50: סמסטר 2026ב, 16 ביולי 2026, שאלון 481, מועד 88

<u>שאלה 1</u>

התשובה: ג'. טענה 1 נכונה לפי משפט 4.39 (גבול של פונקציית הרכבה) עם ההצבה $t = g(x) \to \infty$; ההנחה ש-g עולה אפילו אינה נחוצה. טענה 2 נכונה: הפונקציה $g(x) = x$ עולה ב-$\mathbb{R}$ ושואפת ל-∞, ועבורה $f \circ g = f$.

טענה 1 נכונה

נניח ש-$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, כאשר L מספר ממשי, ותהי g פונקציה עולה ב-$\mathbb{R}$ המקיימת $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. נבדוק את התנאים של משפט 4.39 עם $t = g(x)$ (כללי הגבולות תקפים לכל סוגי הגבולות, גם כאשר $x \to \infty$ ו-$t \to \infty$; כרך ב' עמ' 96):

(1) $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$ (נתון).

(2) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ (נתון).

(3) $g(x)$ הוא מספר ממשי, ולכן שונה מ-∞ (תנאי ג' של משפט 4.39).

מ-(1), (2) ו-(3), לפי משפט 4.39:

$$\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to\infty} f\big(g(x)\big) = \lim_{t\to\infty} f(t) = L.$$

כלומר $\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)$ קיים במובן הסופי, ולכל g כזו הוא שווה ל-L. ■

טענה 2 נכונה

נניח שלכל פונקציה g שעולה ב-$\mathbb{R}$ ומקיימת $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, הגבול $\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)$ קיים במובן הסופי. נבחר $x \in \mathbb{R}$ לכל $g(x) = x$.

(4) g עולה ב-$\mathbb{R}$: לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, אם $x_1 < x_2$ אז $g(x_1) = x_1 < x_2 = g(x_2)$.

(5) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$: יהי M_1 ממשי, ונבחר $M_2 = M_1$. לכל $x > M_2$ מתקיים $g(x) = x > M_1$, ולפי הגדרה 4.55 $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.

מ-(4) ו-(5), g מקיימת את התנאים שבהנחה, ולכן $\lim_{x\to\infty}(f\circ g)(x)$ קיים במובן הסופי. אבל $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x)$ לכל x, כלומר $f \circ g = f$. לכן $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים במובן הסופי. ■

פסילת שאר התשובות

- **א'** פסולה: גם טענה 2 נכונה.
- **ב'** פסולה: גם טענה 1 נכונה.
- **ד'** פסולה: שתי הטענות נכונות.

<u>שאלה 2</u>

התשובה: ב'. הנתון אינו אומר ש-$f(0) = 0$. כאשר $f(0) \neq 0$, המנה $\frac{f(x_n)}{x_n}$ יכולה לשאוף ל-∞ רק מפני שהמכנה שואף ל-0, בלי קשר לגזירות. למשל הפונקציה הקבועה $f(x) = 1$ גזירה ב-0, ועבור $x_n = \frac{1}{n}$ מתקיים $\frac{f(x_n)}{x_n} = n \to \infty$.

הטענה אינה נכונה: דוגמה נגדית

נבחר $f(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ו-$x_n = \frac{1}{n}$.

(1) f גזירה ב-0: לכל $h \neq 0$ מתקיים

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0,$$

ולכן הגבול של המנה כאשר $h \to 0$ קיים ושווה ל-0. לפי הגדרה 7.7, f גזירה ב-0 ו-$f'(0) = 0$.

(2) f רציפה ב-0: לפי (1) ומשפט 7.9.

(3) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (טענה 2.10), ו-$x_n = \frac{1}{n} \neq 0$ לכל n.

(4) לכל n: $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{1}{1/n} = n$, ולפי טענה 2.37 $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. לכן $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \infty$.

מ-(2), (3) ו-(4), f והסדרה (x_n) מקיימות את כל ההנחות של הטענה, ובכל זאת לפי (1) f גזירה ב-$x = 0$. לכן הטענה אינה נכונה. ■

פסילת התשובה האחרת

- **א'** פסולה: הטענה אינה נכונה.

> **מה היה נכון אילו** $f(0) = 0$
>
> אם $f(0) = 0$ ו-f גזירה ב-0, אז $\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$, ולפי טענה 7.8 והגדרת הגבול לפי היינה (הגדרה 4.29) המנה הזו שואפת למספר הסופי $f'(0)$, ולא ל-∞. במקרה כזה הטענה הייתה נכונה. הדוגמה הנגדית משתמשת בדיוק במה שחסר בנתון: $f(0) = 1 \neq 0$.

<u>שאלה 3</u>

התשובה: א'. הבסיס $f + g$ שואף ל-0, ולכן קרוב ל-x_0 הוא בין 0 ל-1; המעריך $\frac{f}{g}$ גדול מ-1 קרוב ל-x_0, כי $\frac{g}{f} \to 0$. מספר בקטע $(0,1)$ בחזקה הגדולה מ-1 קטן מהמספר עצמו, ולכן $0 < (f+g)^{\frac{f}{g}} < f + g \to 0$, וכלל הסנדוויץ' נותן 0.

א' נכונה: הגבול הוא 0

שלב א': $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = 0$

נסמן ב-$N^*_{\delta_0}(x_0)$ את הסביבה הנקובה הנתונה, שבה $f(x) > 0$ ו-$g(x) > 0$. לכל x בה $f(x) \neq 0$, ולכן $g(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f(x)$. לפי אריתמטיקה של גבולות (משפט 4.38):

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

ולכן, שוב לפי משפט 4.38:

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = 0 + 0 = 0$$

שלב ב׳: קרוב ל-x_0: $0 < f(x) + g(x) < 1$ **ו-** $1 < \frac{f(x)}{g(x)}$

(1) $\lim_{x\to x_0} 1 = 1 > 0 = \lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big)$ (שלב 1). לפי משפט 4.42 קיימת סביבה נקובה $N^*_{\delta_1}(x_0)$ שבה $f(x) + g(x) < 1$.

(2) $\lim_{x\to x_0} 1 = 1 > 0 = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ (נתון). לפי משפט 4.42 קיימת סביבה נקובה $N^*_{\delta_2}(x_0)$ שבה $\frac{g(x)}{f(x)} < 1$.

נגדיר $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} > 0$, ויהי $x \in N^*_\delta(x_0)$. אז $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, ולפי (1) $0 < f(x) + g(x) < 1$. לפי (2):

$$\frac{g(x)}{f(x)} < 1 \overset{(2.1)}{\iff} g(x) < f(x) \overset{(2.2)}{\iff} 1 < \frac{f(x)}{g(x)}$$

(2.1) נכפיל ב-$f(x) > 0$.

(2.2) נחלק ב-$g(x) > 0$.

שלב ג׳: $f(x) + g(x) > \big(f(x) + g(x)\big)^{\frac{f(x)}{g(x)}} > 0$ **ב-** $N^*_\delta(x_0)$

יהי $x \in N^*_\delta(x_0)$. נסמן $u = f(x) + g(x)$ ו-$r = \frac{f(x)}{g(x)}$. לפי שלב 2, $0 < u < 1$ ו-$r - 1 > 0$. לכן:

$$u^r \overset{(3.1)}{=} u^1 \cdot u^{r-1} \overset{(3.2)}{<} u^1 \cdot u^0 \overset{(3.3)}{=} u$$

(3.1) $r = 1 + (r-1)$, וחוק החזקות (ח1) של משפט 6.8.

(3.2) $0 < u < 1$, ולכן לפי משפט 6.10 הפונקציה u^t (במשתנה t) יורדת; מ-$r - 1 > 0$ נקבל $u^{r-1} < u^0$. נכפיל ב-$u^1 = u > 0$.

(3.3) $u^1 = u$ ו-$u^0 = 1$ (ח4 במשפט 6.8).

בנוסף $u^r > 0$ (ח5 במשפט 6.8). כלומר, לכל $x \in N^*_\delta(x_0)$:

$$0 < \big(f(x) + g(x)\big)^{\frac{f(x)}{g(x)}} < f(x) + g(x) \qquad (*)$$

שלב ד׳: כלל הסנדוויץ׳

(3) $\big(f(x) + g(x)\big)^{\frac{f(x)}{g(x)}} \le f(x) + g(x)$ לכל $x \in N^*_\delta(x_0)$, לפי $(*)$.

(4) $\lim_{x\to x_0} 0 = 0$, ו-$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = 0$ (שלב 1).

מ-(3) ו-(4), לפי כלל הסנדוויץ׳ לפונקציות (משפט 4.43):

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big)^{\frac{f(x)}{g(x)}} = 0 \qquad \blacksquare$$

פסילת שאר התשובות

- **ב׳, ג׳, ד׳** ו-**ה׳** פסולות: לפי משפט 4.31 (יחידות הגבול) לגבול יש ערך אחד, והוא 0.
- **ו׳** פסולה: תשובה א׳ נכונה.

זו אינה צורה 1^∞

הביטוי נראה כמו $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ (טענה 6.18), ומכאן מגיעות התשובות e ו-$\frac{1}{e}$. אבל כאן הבסיס שואף ל-0, ולא ל-1: זו צורה 0^∞, והיא אינה צורה לא מוגדרת. בסיס קטן מ-1 בחזקה גדולה מ-1 רק קטן, ולכן הגבול הוא 0.

<u>שאלה 4</u>

התשובה: ד'. הנתון $f^2(x) \geq f(x)$, כלומר $f(x)\big(f(x)-1\big) \geq 0$, מתקיים כאשר $f(x)=0$. אין נתון על רציפות, ולכן f יכולה לקבל את הערך 0 בכל נקודה $x \neq x_0$. אז כל סביבה של x_0 מכילה נקודות שבהן f קטנה מ-$f(x_0)$, ו-x_0 אינה נקודת מינימום מקומי, גם כאשר $f(x_0)=1$ וגם כאשר $f(x_0)>1$.

טענה 1 אינה נכונה

דוגמה נגדית: $x_0=0$ ו-

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

(1) f מוגדרת ב-$\mathbb{R}$, ובפרט בסביבת 0, ו-$f(0)=1$.

(2) $f^2(x)\geq f(x)$ לכל x: ב-$x=0$ מתקיים $1^2=1\geq 1$, ולכל $x\neq 0$ מתקיים $0^2=0\geq 0$. לכן כל סביבה של 0 מתאימה.

(3) 0 אינה נקודת מינימום מקומי של f: תהי $N_r(0)=(-r,r)$ סביבה כלשהי של 0. הנקודה $x=\frac{r}{2}$ שייכת לה ושונה מ-0, ולכן $f\left(\frac{r}{2}\right)=0<1=f(0)$. כלומר אין סביבה של 0 שבה $f(x)\geq f(0)$ לכל x, ולפי הגדרה 8.1 ב' 0 אינה נקודת מינימום מקומי.

מ-(1), (2) ו-(3), f מקיימת את כל ההנחות של טענה 1, אבל אין לה מינימום מקומי ב-$x_0=0$.

טענה 2 אינה נכונה

דוגמה נגדית: $x_0=0$ ו-

$$f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

(4) f מוגדרת ב-$\mathbb{R}$, ו-$f(0)=2>1$.

(5) $f^2(x)\geq f(x)$ לכל x: ב-$x=0$ מתקיים $2^2=4\geq 2$, ולכל $x\neq 0$ מתקיים $0\geq 0$.

(6) בכל סביבה $N_r(0)$ הנקודה $x=\frac{r}{2}$ מקיימת $f\left(\frac{r}{2}\right)=0<2=f(0)$, ולפי הגדרה 8.1 ב' 0 אינה נקודת מינימום מקומי.

מ-(4), (5) ו-(6), f מקיימת את ההנחות של טענה 2, אבל אין לה מינימום מקומי ב-0.

פסילת שאר התשובות

- **א'** ו-**ג'** פסולות: טענה 1 אינה נכונה.
- **ב'** פסולה: טענה 2 אינה נכונה.

ומה אם f רציפה ב-x_0?

עם רציפות ב-x_0 טענה 1 נכונה: ליד x_0 מתקיים $f(x) > 0$ (כי $f(x_0) = 1$), ומ-$f(x)\big(f(x)-1\big) \geq 0$ נקבל $f(x) \geq 1 = f(x_0)$. טענה 2 אינה נכונה גם עם רציפות: $f(x) = 2 - x^2$ רציפה, ולכל $|x| \leq 1$ מתקיים $f(x) \geq 1$ ולכן $f^2(x) \geq f(x)$; $f(0) = 2 > 1$, אבל לכל $x \neq 0$ $f(x) < 2 = f(0)$, כך ש-0 היא נקודת מקסימום מקומי ולא מינימום. הנתון נותן רק $f(x) \geq 1$ ליד x_0, וזה מספיק רק כאשר $f(x_0) = 1$.

<u>שאלה 5</u>

התשובה: ד'. אין נתון על רציפות ב-0, ולכן הערך $f(0) = 0$ אינו קשור לערכים של f בקטע $(0,\infty)$. הפונקציה ששווה ל-$-\frac{1}{x}$ בקטע $(0,\infty)$ ול-0 עבור $x \leq 0$ מפריכה את שתי הטענות: $f(1) = -1 < 0$, ו-$f(x) \to 0$ כאשר $x \to \infty$.

הדוגמה הנגדית

נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

(1) f מוגדרת ב-$\mathbb{R}$, ו-$f(0) = 0$.

(2) יהי $x > 0$. הנגזרת ב-x תלויה רק בערכי f בסביבה של x (הגדרה 7.7), ובסביבה $(0, 2x)$ מתקיים $f(t) = -\frac{1}{t} = -t^{-1}$. לפי משפט 7.20 (עם $n = -1$) $(x^{-1})' = -x^{-2}$, ולפי מסקנה 7.15 (עם הקבוע -1) $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

לכן f מקיימת את כל תנאי השאלה.

טענה 1 אינה נכונה

$x = 1 > 0$, אבל $f(1) = -\frac{1}{1} = -1 < 0$.

טענה 2 אינה נכונה

בקטע $(0,\infty)$ מתקיים $f(x) = -\frac{1}{x}$, ולכן:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-1)\cdot\frac{1}{x} \overset{(i)}{=} (-1)\cdot 0 = 0 \neq \infty$$

(i) $\frac{1}{x} \to 0$ כאשר $x \to \infty$ (שאלה 78 בפרק 4), ואריתמטיקה של גבולות (משפט 4.38; הכללים תקפים גם כאשר $x \to \infty$, כרך ב' עמ' 96).

לפי יחידות הגבול (משפט 4.31, באותו אופן באינסוף) f אינה שואפת ל-∞.

פסילת שאר התשובות

- **א'** ו-**ג'** פסולות: טענה 1 אינה נכונה.
- **ב'** פסולה: טענה 2 אינה נכונה.

הרציפות ב-0 חסרה

אילו f הייתה רציפה גם ב-0, טענה 1 הייתה נכונה: אז f רציפה בקטע $[0,\infty)$ ו-$f'(x)>0$ בכל נקודה פנימית שלו, ולפי משפט 8.18 א' f עולה ב-$[0,\infty)$, כלומר $f(x)>f(0)=0$ לכל $x>0$. טענה 2 אינה נכונה גם עם רציפות: $f(x)=\frac{x}{x+1}$ עבור $x\geq 0$ ו-$f(x)=0$ עבור $x<0$ רציפה, $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$ לכל $x>0$, אבל $f(x)=1-\frac{1}{x+1}\to 1$. נגזרת חיובית נותנת פונקציה עולה, לא פונקציה ששואפת ל-∞.

<u>שאלה 6</u>

הרעיון

נכלא את הממוצע ההנדסי c_n בין הממוצע ההרמוני h_n לבין הממוצע החשבוני b_n (אי-שוויון הממוצעים, משפט 1.59). לפי משפט 2.51, סדרת הממוצעים החשבוניים של סדרה מתכנסת שואפת לגבול שלה; נפעיל אותו על (a_n) ועל $\left(\frac{1}{a_n}\right)$, ונקבל את הגבולות של b_n ושל h_n. נבחין בין שלושה מקרים: גבול חיובי, גבול 0 וגבול ∞. בשני הראשונים נסיים במשפט הסנדוויץ', ובשלישי בקריטריון ההשוואה לאינסוף.

כמו בספר, ההוכחה משתמשת רק בתוצאות שקודמות למשפט 2.52: משפט 1.59, טענה 2.11, משפטים 2.28, 2.31, 2.32, 2.43, 2.45 ו-2.51, והגדרה 2.38.

הוכחה

שלב א': שלוש סדרות הממוצעים

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את הממוצע החשבוני ואת הממוצע ההרמוני של $a_1,\dots,a_n$:

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\qquad h_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

ו-$c_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ הוא הממוצע ההנדסי שלהם.

המספרים $a_1,\dots,a_n$ חיוביים, ולכן לפי משפט 1.59 (אי-שוויון הממוצעים), לכל n:

$$h_n\leq c_n\leq b_n. \qquad (*)$$

בנוסף, המכנה של h_n הוא סכום של מספרים חיוביים, ולכן $h_n>0$, ו-

$$\frac{1}{h_n}=\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}.$$

כלומר $\left(\frac{1}{h_n}\right)$ היא סדרת הממוצעים החשבוניים של הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$. $(**)$

שלב ב': הגבולות האפשריים של (a_n)

נניח ש-(a_n) שואפת לגבול L, סופי או אינסופי.

- $L\neq-\infty$: אילו $a_n\to-\infty$, אז לפי הגדרה 2.38 עם $M=0$ היה קיים N כך ש-$a_n<0$ לכל $n>N$, בסתירה לכך שכל איברי הסדרה חיוביים.
- אם L סופי, אז $L\geq 0$: הסדרה הקבועה 0 מתכנסת ל-0 (טענה 2.11), ולכל n מתקיים $a_n>0$. לפי משפט 2.31, $L\leq 0$.

לכן נותרו שלושה מקרים: $L > 0$, $L = 0$ ו-$L = \infty$.

שלב ג': מקרה א: $L > 0$ סופי

(1) $a_n \to L$, ולכן לפי משפט 2.51 א', $b_n \to L$.

כל איברי (a_n) שונים מ-0, ו-$L \neq 0$. לכן לפי אריתמטיקה של גבולות (משפט 2.28, סעיף 2, עם הסדרה הקבועה 1 במונה):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}.$$

מכאן, לפי $(**)$ ולפי משפט 2.51 א' עבור הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$, $\frac{1}{h_n} \to \frac{1}{L}$. שוב לפי אריתמטיקה של גבולות (משפט 2.28, סעיף 2), כי $\frac{1}{L} \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{h_n}} = \frac{1}{\frac{1}{L}} = L.$$

(2) $h_n \to L$.

(3) $h_n \leq c_n \leq b_n$ לכל n, לפי $(*)$.

מ-(1), (2) ו-(3), לפי משפט 2.32 (משפט הסנדוויץ'), $c_n \to L$.

שלב ד': מקרה ב: $L = 0$

(4) $0 < h_n \leq c_n \leq b_n$ לכל n, לפי $(*)$, ולכן בפרט $0 \leq c_n \leq b_n$.

(5) הסדרה הקבועה 0 שואפת ל-0 (טענה 2.11), ו-$b_n \to 0$ לפי משפט 2.51 א'.

מ-(4) ו-(5), לפי משפט 2.32 (משפט הסנדוויץ'), $c_n \to 0$.

שלב ה': מקרה ג: $L = \infty$

$a_n \to \infty$, ולכן לפי משפט 2.43 ה' (כלל "$\frac{1}{\infty}$"), $\frac{1}{a_n} \to 0$. לפי $(**)$ ולפי משפט 2.51 א' עבור הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$, גם $\frac{1}{h_n} \to 0$. בנוסף $\frac{1}{h_n} > 0$ לכל n, ולכן לפי משפט 2.43 ו' (כלל "$\frac{1}{0^+}$"):

$$h_n = \frac{1}{\frac{1}{h_n}} \to \infty.$$

(6) $h_n \to \infty$.

(7) $c_n \geq h_n$ לכל n, לפי $(*)$.

מ-(6) ו-(7), לפי משפט 2.45 (קריטריון ההשוואה לאינסוף), $c_n \to \infty$.

בשלושת המקרים (c_n) שואפת לגבול של (a_n), כנדרש. ■

חסם מלמעלה לבדו אינו מספיק

מ-$c_n \leq b_n$ ומ-$b_n \to L$ לא נובע ש-$c_n \to L$: משפט הסנדוויץ' דורש גם סדרה מלמטה עם אותו גבול, ולכן נחוץ הממוצע ההרמוני h_n. רק במקרה $L = 0$ הסדרה הקבועה 0 מספיקה מלמטה. במקרה $L = \infty$ ההפך: b_n אינו עוזר כלל, וההוכחה עוברת דרך $h_n \leq c_n$.

<u>שאלה 7</u>

סעיף א

הרעיון

המשפט נובע ישירות ממשפט 5.14 (גבול של פונקציית הרכבה), שקודם לו בספר. מרציפות g ב-t_0 נקבל $g(t) \to x_0$; מרציפות f ב-x_0, לפי משפט 5.14, $f(g(t)) \to f(x_0)$, וזה בדיוק הערך של $f \circ g$ ב-t_0.

כמו בספר, ההוכחה משתמשת רק בהגדרה 5.1 ובמשפט 5.14.

הוכחה

נתון ש-g רציפה ב-t_0 ו-f רציפה ב-$x_0 = g(t_0)$. לפי הגדרה 5.1 צריך להראות ש-$f \circ g$ מוגדרת בסביבה של t_0 ושו-$\lim_{t\to t_0}(f \circ g)(t) = (f \circ g)(t_0)$.

g רציפה ב-t_0, ולכן לפי הגדרה 5.1 :

$$\lim_{t\to t_0} g(t) = g(t_0) = x_0.$$

נבדוק את התנאים של משפט 5.14 :

(1) f רציפה בנקודה x_0 (נתון).

(2) $\lim_{t\to t_0} g(t) = x_0$ (לעיל).

מ-(1) ו-(2), לפי משפט 5.14, $f \circ g$ מוגדרת בסביבה נקובה של t_0, ומתקיים :

$$\lim_{t\to t_0}(f \circ g)(t) = f(x_0) = f(g(t_0)) = (f \circ g)(t_0).$$

בנוסף, $(f \circ g)(t_0) = f(x_0)$ מוגדר, כי f מוגדרת ב-x_0. לכן $f \circ g$ מוגדרת בסביבה (מלאה) של t_0, והגבול שלה ב-t_0 שווה לערכה שם. לפי הגדרה 5.1, $f \circ g$ רציפה ב-t_0. ■

למה לא משפט 4.39

משפט 4.39 (גבול של פונקציית הרכבה ביחידה 4) דורש בנוסף ש-$g(t) \neq x_0$ לכל t בסביבה נקובה של t_0, ותנאי זה אינו נתון כאן : למשל, אם g קבועה, אז $g(t) = x_0$ לכל t. משפט 5.14 אינו דורש זאת, כי הוא מניח ש-f **רציפה** ב-x_0 ולא רק שיש לה גבול שם. לכן ההוכחה נשענת על משפט 5.14.

סעיף ב

הרעיון

הנתון $0 < f(x) < e^{-x^2}$ נותן שני דברים : f חיובית, ולפי כלל הסנדוויץ' $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, כי $e^{-x^2} \to 0$. אלה בדיוק התנאים של **שאלה 36 בפרק 5** : פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$, חיובית בו ושואפת ל-0 באינסוף, מקבלת בו מקסימום.

הוכחה

שלב א' : $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$

(1) $\lim_{x\to\infty}(-x^2) = -\infty$: לפי אריתמטיקה של גבולות אינסופיים (משפט 4.53 ג', כלל "$\infty \cdot \infty$" ; הכללים תקפים גם לגבולות באינסוף, כרך ב' עמ' 96), $x^2 = x \cdot x \to \infty$, ולפי משפט 4.53 ז' $-x^2 \to -\infty$.

(2) $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ (משפט 6.9, סעיף 2, עם הבסיס $e > 1$).

(3) $-x^2$ הוא מספר ממשי, ולכן שונה מ-$-\infty$ (תנאי ג' של משפט 4.39).

מ-(1), (2) ו-(3), לפי משפט 4.39 (עם $t = -x^2$):

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0.$$

שלב ב': $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (כלל הסנדוויץ')

(4) $0 < f(x) < e^{-x^2}$ לכל $x \geq 0$ (נתון).

(5) $\lim_{x\to\infty} 0 = 0$ ו-$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$ (שלב 1).

מ-(4) ו-(5), לפי כלל הסנדוויץ' לפונקציות (משפט 4.43; תקף גם לגבולות באינסוף, כרך ב' עמ' 96):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

שלב ג': f מקבלת מקסימום בקטע $[0,\infty)$

נבדוק את התנאים של שאלה 36 בפרק 5:

(6) f רציפה בקטע $[0,\infty)$ (נתון).

(7) $f(x) > 0$ לכל $x \geq 0$ (נתון).

(8) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (שלב 2).

מ-(6), (7) ו-(8), לפי שאלה 36 בפרק 5, f מקבלת מקסימום בקטע $[0,\infty)$: קיימת נקודה $x_0 \geq 0$ כך ש-$f(x) \leq f(x_0)$ לכל $x \geq 0$ (הגדרה 5.36). ■

אם רוצים להוכיח את שאלה 36

לפי (7), $f(0) > 0$. לפי (8) והגדרה 4.54 עם $\varepsilon = f(0)$, קיים M כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x)| < f(0)$, ובפרט $f(x) < f(0)$; אפשר להגדיל את M ולהניח $M > 0$. f רציפה בקטע הסגור $[0,M]$, ולפי משפט 5.37 (המשפט השני של ויירשטראס) קיימת $x_0 \in [0,M]$ כך ש-$f(x) \leq f(x_0)$ לכל $x \in [0,M]$. אם $x > M$, אז $f(x) < f(0) \leq f(x_0)$, כי $0 \in [0,M]$. לכן $f(x) \leq f(x_0)$ לכל $x \geq 0$. ■

ויירשטראס לבדו אינו מספיק

משפט 5.37 עוסק רק בקטע **סגור וחסום**, ו-$[0,\infty)$ אינו חסום. בלי הגבול 0 באינסוף הטענה נכשלת: $2 - \frac{1}{1+x}$ רציפה וחיובית בקטע $[0,\infty)$, אבל היא עולה ממש, ולכן אינה מקבלת בו מקסימום. החסם e^{-x^2} הוא שמכריח את f לשאוף ל-0.

<u>שאלה 8</u>

סעיף א

הרעיון

הטענה אינה נכונה. התנאים משווים רק את ה"תחתית" של הקבוצות (לאיבר הקטן של A יש איבר קטן ממנו ב-B) ואת ה"פסגה" (לאיבר הגדול של B יש איבר גדול ממנו ב-A). הם אינם מחייבים שכל B תהיה מתחת לכל A, ולכן

שתי קבוצות "משולבות" כמו $A = \{1, 3\}$ ו-$B = \{0, 2\}$ מקיימות אותם.

הטענה אינה נכונה: דוגמה נגדית

נבחר $A = \{1, 3\}$ ו-$B = \{0, 2\}$.

(1) A ו-B לא ריקות; 1 חסם מלרע של A, כי $1 \leq 1$ ו-$1 \leq 3$, ו-2 חסם מלעיל של B, כי $0 \leq 2$ ו-$2 \leq 2$ (הגדרה 3.1).

(2) לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש-$b < a$: עבור $a = 1$ נבחר $b = 0 < 1$, ועבור $a = 3$ נבחר $b = 0 < 3$.

(3) לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש-$b < a$: עבור $b = 0$ נבחר $a = 1 > 0$, ועבור $b = 2$ נבחר $a = 3 > 2$.

2 הוא האיבר המקסימלי של B, ולכן לפי טענה 3.8 $\sup B = \max B = 2$. 1 הוא האיבר המינימלי של A, ולכן לפי טענה 3.13 (סעיף 2) $\inf A = \min A = 1$.

לפי (1), (2) ו-(3) הקבוצות מקיימות את כל ההנחות, אבל $\sup B = 2 > 1 = \inf A$, כלומר $\sup B \leq \inf A$ אינו מתקיים. ■

מה כן נכון

אם $b \leq a$ **לכל** $a \in A$ **ולכל** $b \in B$, אז $\sup B \leq \inf A$: כל $a \in A$ הוא חסם מלעיל של B, ולכן $\sup B \leq a$ (הגדרה 3.7: $\sup B$ הוא החסם מלעיל המינימלי). מכאן ש-$\sup B$ חסם מלרע של A, ולפי הגדרה 3.12 ($\inf A$ הוא החסם מלרע המקסימלי) $\sup B \leq \inf A$. בדוגמה הנגדית התנאי הזה נכשל: $b = 2 > 1 = a$.

סעיף ב

הרעיון

תת-הסדרה של האיברים במקומות האי-זוגיים חסומה וחיובית. לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת, שגבולה אי-שלילי והוא גבול חלקי של (a_n). הגבול העליון הוא הגבול החלקי המקסימלי, ולכן $\overline{\lim} a_n \geq 0$. באותו אופן, מהמקומות הזוגיים, $\underline{\lim} a_n \leq 0$. מכפלה של מספר אי-שלילי במספר אי-חיובי אינה חיובית.

הוכחה

שלב א': $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \geq 0$

(a_n) חסומה, ולכן לפי משפט 3.38 יש לה גבול חלקי מקסימלי וגבול חלקי מינימלי, ולפי הגדרה 3.39 הם $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ ו-$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. לפי הגדרה 2.15 קיים $M > 0$ כך ש-$|a_n| < M$ לכל n.

נתבונן בסדרה $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ של האיברים במקומות האי-זוגיים. לכל k מתקיים $|a_{2k-1}| < M$, ולכן היא חסומה (הגדרה 2.15). לפי משפט 3.32 (בולצאנו-ויירשטראס) יש לה תת-סדרה מתכנסת $(a_{2k_j-1})_{j=1}^{\infty}$, כאשר (k_j) סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. נסמן $L_1 = \lim\limits_{j\to\infty} a_{2k_j-1}$.

(1) $(a_{2k_j-1})_{j=1}^{\infty}$ היא תת-סדרה של (a_n): האינדקסים $n_j = 2k_j - 1$ טבעיים, ומ-$k_{j+1} > k_j$ נקבל $2k_{j+1} - 1 > 2k_j - 1$, כלומר (n_j) עולה ממש (הגדרה 3.24).

(2) $a_{2k_j-1} > 0$ לכל j, כי $2k_j - 1$ אי-זוגי.

מ-(1), לפי הגדרה 3.26, L_1 הוא גבול חלקי של (a_n). מ-(2), לפי משפט 2.31 (עם הסדרה הקבועה $0 \leq a_{2k_j-1}$), $L_1 \geq 0$. מכיוון ש-$\overline{\lim} a_n$ הוא הגבול החלקי המקסימלי:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \geq L_1 \geq 0$$

שלב ב׳: $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leq 0$

באותו אופן נתבונן בסדרה $(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$ של האיברים במקומות הזוגיים: $|a_{2k}| < M$ לכל k, ולפי משפט 3.32 יש לה תת-סדרה מתכנסת $(a_{2m_j})_{j=1}^{\infty}$, כאשר (m_j) עולה ממש. נסמן $L_2 = \lim_{j\to\infty} a_{2m_j}$.

(3) האינדקסים $2m_j$ טבעיים ועולים ממש, ולכן (a_{2m_j}) תת-סדרה של (a_n) (הגדרה 3.24), ו-L_2 גבול חלקי של (a_n) (הגדרה 3.26).

(4) $a_{2m_j} < 0$ לכל j, כי $2m_j$ זוגי.

מ-(4), לפי משפט 2.31, $L_2 \leq 0$. מכיוון ש-$\underline{\lim} a_n$ הוא הגבול החלקי המינימלי, ולפי (3):

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leq L_2 \leq 0$$

שלב ג׳: המכפלה

נסמן $S = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ ו-$I = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$. לפי שני השלבים הקודמים $S \geq 0$ ו-$-I \geq 0$, ולכן:

$$S \cdot I = -\big(S \cdot (-I)\big) \overset{(i)}{\leq} 0$$

(i) מכפלה של שני מספרים אי-שליליים, $S \cdot (-I) \geq 0$.

כלומר $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leq 0$, כנדרש. ■

אי-השוויון יכול להיות שוויון

הסדרה $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ חסומה, חיובית במקומות האי-זוגיים ושלילית במקומות הזוגיים, והיא שואפת ל-0 (משפט 2.22: סדרה אפסה כפול סדרה חסומה). לכן $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = 0$ והמכפלה שווה ל-0: אי-אפשר לשפר את $0 \leq$ ל-$0 <$.

שאלה 9

סעיף 1

הרעיון

לפי משפט לגראנז׳ (משפט 8.6) בקטע $[a,x]$: $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$. החסם מלעיל של f', יחד עם $x - a <$ $b - a$, נותן חסם מלעיל של $f(x)$ שאינו תלוי ב-x.

הוכחה

נניח ש-f' חסומה מלעיל בקטע (a,b) (הגדרה 4.8): קיים K כך ש-$f'(x) \leq K$ לכל $x \in (a,b)$. נסמן $M_1 = \max\{K, 0\}$. אז $M_1 \geq 0$, ו-$f'(x) \leq M_1$ לכל $x \in (a,b)$.

יהי $x \in (a,b)$. נבדוק את התנאים של משפט 8.6 בקטע $[a,x]$:

(1) f רציפה בקטע הסגור $[a,x]$: לפי הנתון והגדרה 5.26, f רציפה מימין ב-a ורציפה בכל נקודה של (a,b). בפרט היא רציפה בכל נקודה של (a,x), ובנקודה $x \in (a,b)$ היא רציפה, ולכן לפי טענה 5.18 גם רציפה משמאל. לפי הגדרה 5.26, f רציפה בקטע $[a,x]$.

(2) f גזירה בקטע הפתוח (a,x), כי $(a,x)\subseteq(a,b)$ ו-f גזירה (פעמיים) ב-(a,b).

מ-(1) ו-(2), לפי משפט 8.6 (משפט הערך הממוצע של לגראנז'), קיימת נקודה $c\in(a,x)$ כך ש-$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
מכאן:

$$f(x)\overset{(1.1)}{=}f(a)+f'(c)(x-a)\overset{(1.2)}{\leq}$$
$$\leq f(a)+M_1(x-a)\overset{(1.3)}{\leq}f(a)+M_1(b-a)$$

(1.1) נכפיל את שני האגפים ב-$x-a>0$ ונוסיף $f(a)$.

(1.2) $c\in(a,x)\subseteq(a,b)$, ולכן $f'(c)\leq M_1$; נכפיל ב-$x-a>0$.

(1.3) $0<x-a<b-a$ ו-$M_1\geq 0$.

נסמן $M=f(a)+M_1(b-a)$. המספר M אינו תלוי ב-x, ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f(x)\leq M$. לכן f חסומה מלעיל בקטע (a,b) (הגדרה 4.8). ■

> **למה** $M_1\geq 0$
>
> ב-(1.3) מחליפים את $x-a$ במספר הגדול ממנו $b-a$. זה מותר רק כשהמקדם M_1 אינו שלילי, ולכן בוחרים $M_1=\max\{K,0\}$ ולא את K עצמו (למשל עבור $K=-1$ האי-שוויון היה מתהפך). שימו לב גם שהמסקנה היא חסימות **מלעיל**, $f(x)\leq M$, ולא $|f(x)|\leq M$.

סעיף 2

הרעיון

f אינה חסומה מלעיל ליד b, ולכן לפי סעיף 1 (בכיוון ההפוך) גם f' אינה חסומה מלעיל: לכל M יש נקודה x_1 שבה $f'(x_1)>M$. מכיוון ש-$f''>0$, f' עולה, ולכן $f'(x)>M$ לכל $x\in(x_1,b)$.

הוכחה

שלב א': f אינה חסומה מלעיל בקטע (a,b)

נניח בשלילה שקיים K כך ש-$f(x)\leq K$ לכל $x\in(a,b)$. לפי הגדרה 4.52 ($\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$) עם $M=K$, קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $b-\delta<x<b$ מתקיים $f(x)>K$. נבחר נקודה x בקטע $(\max\{a,b-\delta\},b)$, שאינו ריק. אז $x\in(a,b)$ ו-$b-\delta<x<b$, ולכן $f(x)>K$, בסתירה להנחה.

שלב ב': f' אינה חסומה מלעיל בקטע (a,b)

אילו f' הייתה חסומה מלעיל בקטע (a,b), אז לפי סעיף 1 גם f הייתה חסומה מלעיל שם, בסתירה לשלב הקודם. לכן לכל מספר ממשי M קיימת נקודה $x_1\in(a,b)$ כך ש-$f'(x_1)>M$.

שלב ג': f' עולה בקטע (a,b)

(1) f' גזירה בכל נקודה של הקטע (a,b), כי f גזירה פעמיים שם.

(2) $(f')'(x)=f''(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$.

מ-(1) ו-(2), לפי משפט 8.17 א', f' עולה בקטע (a,b).

שלב ד׳: $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \infty$

יהי $M \in \mathbb{R}$. לפי השלב השני קיימת $x_1 \in (a,b)$ כך ש-$f'(x_1) > M$. נגדיר $\delta = b - x_1 > 0$. לכל x המקיים $b - \delta < x < b$, כלומר $x_1 < x < b$:

$$f'(x) \overset{(2.1)}{>} f'(x_1) \overset{(2.2)}{>} M$$

(2.1) f' עולה בקטע (a,b), ו-$x_1 < x$ שתיהן בקטע.

(2.2) בחירת x_1.

לפי הגדרה 4.52, $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \infty$. ■

סעיף 3

הרעיון

לפי הרמז, $f(x) = x - \ln x$ בקטע $[1,\infty)$ (כלומר $a = 1$) מקיימת את כל התנאים, אבל $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \to 1$.

הוכחה

נבחר $a = 1$ ו-$f(x) = x - \ln x$.

(1) f רציפה בקטע $[1,\infty)$: x רציפה (מסקנה 5.12 א׳), $\ln x$ רציפה בכל $x > 0$ (משפט 6.14), ולפי משפט 5.11 ב׳ גם ההפרש רציף.

(2) f גזירה פעמיים בקטע $(1,\infty)$: לפי משפטים 7.13 ו-7.29, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, ולפי משפט 7.20, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$.

(3) $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ לכל $x \in (1,\infty)$.

(4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$: הצורה $x - \ln x$ היא ״$\infty - \infty$״, ולכן נוציא קודם את x כגורם משותף:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \overset{(3.1)}{=} \infty$$

(3.1) לפי שאלה 56 בפרק 8 (עם $\alpha = 1$), $\frac{\ln x}{x} \to 0$. לפי אריתמטיקה של גבולות, $1 - \frac{\ln x}{x} \to 1 - 0 = 1 > 0$ (משפט 4.38), ומכיוון ש-$x \to \infty$, המכפלה שואפת ל-∞ (משפט 4.53 ד׳, כלל ״$\infty \cdot$ מספר חיובי״; הכללים תקפים גם כאשר $x \to \infty$, כרך ב׳, עמ׳ 96).

אבל

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \overset{(3.2)}{=} 1 - 0 = 1 \neq \infty$$

(3.2) $\frac{1}{x} \to 0$ כאשר $x \to \infty$ (שאלה 78 בפרק 4), ולפי אריתמטיקה של גבולות (משפט 4.38).

מ-(1)–(4), f מקיימת את כל תנאי הטענה, אבל $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$. לכן הטענה אינה נכונה. ■