סיכום ונוסחאון במתמטיקה בדידה

קורס 20476 עודכן ב-2026ב׳

(נכתב על ידי דניאל וונג www.wongi.io)
(עדכון – נתנאל כהן)

תוכן העניינים

ביבליוגרפיה

ברגר, ש׳. (2019). *מתמטיקה בדידה* (כרך תורת הקבוצות). רעננה : האוניברסיטה הפתוחה.

ברגר, ש׳. (2019). *מתמטיקה בדידה* (כרך תורת הגרפים). רעננה : האוניברסיטה הפתוחה.

1. לוגיקה

1.1 טבלאות אמת

	p	T	T	F	F
	q	T	F	T	F
סתירה	F	F	F	F	F
טאוטולוגיה	T	T	T	T	T
שלילה	$\neg p$	F	F	T	T
"וגם"	$p \wedge q$	T	F	F	F
"או"	$p \vee q$	T	T	T	F
"אם... אז..."	$p \rightarrow q$	T	F	T	T
"...אם ורק אם..."	$p \leftrightarrow q$	T	F	F	T
NAND	$p \uparrow q$	F	T	T	T
NOR	$p \downarrow q$	F	F	F	T
XOR	$p \oplus q$	F	T	T	F

1.2 שקילויות שימושיות

שלילה כפולה	$\neg\neg p \equiv p$
חילוף – קומוטטיבי	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
קיבוץ – אסוציאטיבי	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
פילוג – דיסטריבוטיבי	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
כללי דה-מורגן	$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
עקרון ה-*contrapositive*	$p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$
שלילה/השלמה	$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$
בליעה	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
זהות	$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$
שליטה	$p \wedge F \equiv F$ $p \vee T \equiv T$
אידמפוטנט	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$

שקילות טאוטולוגית ומסומן $\equiv$

שני פסוקים פורמאליים נקראים שקולים טאוטולוגית ובקיצור שקולים, אם יש להם את אותו לוח אמת.

נביעה / גרירה טאוטולוגית

שני פסוקים פורמאליים מהם בונים לוח אמת מאוחד, למשל שני הפסוקים p, q. נסתכל בכל שורה בלוח האמת שבו ערכו של p הוא T, אם באותה השורה ערכו של q יהיה גם T, אז נאמר ש- p גורר טאוטולוגית את q או q נובע טאוטולוגית מ- p.

הבעת $\rightarrow$ בעזרת קשרים אחרים

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

הבעת $\leftrightarrow$ בעזרת קשרים אחרים

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

1.3 כללי היסק

נתון פסוק שערכו T (למעלה) אז נובע שגם הפסוק (למטה) ערכו T

Modus Ponens	$(p \rightarrow q) \wedge p$ q
Modus Tollens	$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$ $\neg p$
Exportation	$(p \wedge q) \rightarrow r$ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
Hypothetical Syllogism	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ $p \rightarrow r$
Absorption	$p \rightarrow q$ $p \rightarrow (p \wedge q)$
Disjunctive Syllogism	$(p \vee q) \wedge \neg p$ q
Addition	p $p \vee q$
Simplification	$p \wedge q$ p
Resolution	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ $q \vee r$

משתנים וכמתים

קיים x שמקיים $p(x)$ — $\exists x(p(x))$
כל x מקיים $p(x)$ — $\forall x(p(x))$

דה–מורגן לכמתים

$\neg\forall x(p(x)) \equiv \exists x(\neg p(x))$
$\neg\exists x(p(x)) \equiv \forall x(\neg p(x))$
$\forall x(p(x)) \equiv \neg\exists x(\neg p(x))$

הגדרות לשלילה

אם	אם ורק אם
לכל	קיים
$<$	$\geq$

הוכחה מהגדרה

אם לכל	יהי
קיים	נבחר

2 תורת הקבוצות

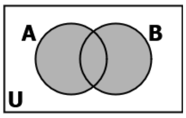
2.1 בסיס

איבר שייך לקבוצה – נסמן $\in$ **איבר לא שייך לקבוצה** – נסמן $\notin$	$1 \in \{1,2,\{3\}\}$ $3 \notin \{1,2,\{3\}\}$
קבוצה חלקית – נתונות שתי קבוצות A, B נאמר ש-A חלקית ל-B (או שנאמר ש-A תת-קבוצה של B או A מוכלת ב-B) אם כל איבר ששייך ל-A שייך גם ל-B. נסמן $A \subseteq B$	$\forall x(x \in A \to x \in B)$
קבוצה חלקית ממש – נתונות שתי קבוצות A, B נאמר ש-A חלקית ממש ל-B אם כל איבר ששייך ל-A הוא גם שייך ל-B וקיים איבר ששייך ל-B ולא שייך ל-A. נסמן $A \subset B$	$\forall x(x \in A \to x \in B)$ $\land$ $\exists x(x \in B \land x \notin A)$

2.3 פעולות על קבוצות

הגדרת איחוד קבוצות

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ או } x \in B\}$

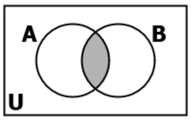


קומוטטיביות (חילופיות)	$A \cup B = B \cup A$
אסוציאטיביות (קיבוציות)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
אידמפוטנטיות (בליעה)	$A \cup A = A\,, A \cup \emptyset = A$
$A \subseteq A \cup B\,, B \subseteq A \cup B$	$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

$A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ וגם } B \subseteq C$

הגדרת חיתוך קבוצות

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ וגם } x \in B\}$

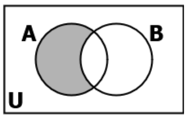


קומוטטיביות (חילופיות)	$A \cap B = B \cap A$
אסוציאטיביות (קיבוציות)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
אידמפוטנטיות (בליעה)	$A \cap A = A\,, A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cap B \subseteq A\,, A \cap B \subseteq B$	$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \text{ וגם } C \subseteq B$

הגדרת הפרש קבוצות

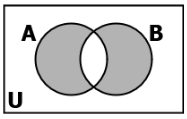
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ וגם } x \notin B\}$



משפט 1.24	$A \setminus B = A \cap B^C$
שאלה 42	$A \setminus B = B^C \setminus A^C$

הגדרת הפרש סימטרי

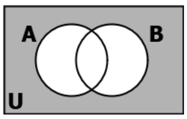
$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



קומוטטיביות (חילופיות)	$A\Delta B = B\Delta A$
אסוציאטיביות (קיבוציות)	$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
שאלה 31	$A\Delta\emptyset = A$ $A\Delta A = \emptyset$
שאלה 38	$A\Delta U = A^C$ $A\Delta A^C = U$
שאלה 43	$(A\Delta B)^C = A\Delta B^C = A^C\Delta B$

הגדרת משלים

$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\}$
$B^C = \{x \in U \mid x \notin B\}$



2.2 קבוצות בסיסיות

קבוצה – נסמן {} שם כללי לתיאור אוסף של איברים (סינגלטון). אין חשיבות לסדר בה רשומים איברי הקבוצה. כל קבוצה חלקית לעצמה ושווה לעצמה.	$A \subseteq A$ $A = A$ $A \sim A$
הקבוצה הריקה – נסמן $\emptyset$ אוסף שאין בו איברים. הקבוצה הריקה חלקית לכל קבוצה אחרת כולל לעצמה, שקולה לעצמה.	$\emptyset \subseteq A$ $\emptyset = \emptyset$ $\emptyset \sim \emptyset$ $A \neq \emptyset \text{ only if } \emptyset \subset A$
קבוצת החזקה – נסמן $\mathcal{P}$ קבוצת החזקה של הקבוצה A היא קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה A. אם A קבוצה סופית בעלת n איברים אז $\mathcal{P}(A)$ מכילה 2^n איברים. אם A קבוצה אינסופית אז $\mathcal{P}(A)$ קבוצה אינסופית.	$A \in \mathcal{P}(A)$ $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\text{if } \|A\| = n \text{ then } \|\mathcal{P}(A)\| = 2^n$

2.4 אלגברה של קבוצות

כללי דה-מורגן	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
משלים	$(A^C)^C = A$ $U^C = \emptyset$ $\emptyset^C = U$ $A^C \cup A = U$ $A^C \cap A = \emptyset$
חוקי פילוג של איחוד וחיתוך	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
הפרש סימטרי	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2.5 חיתוכים ואיחודים אינסופיים

תהי Γ קבוצה לא ריקה. לכל איבר α של Γ תהי A_α קבוצה. (לאיברי Γ נקרא אינדקסים, ובהקשר זה נאמר ש-α הוא האינדקס של A_α).

איחוד כל ה-A_α-ים	$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \{x \mid \exists\alpha \in \Gamma\ (x \in A_\alpha)\}$
חיתוך כל ה-A_α-ים	$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \{x \mid \forall\alpha \in \Gamma\ (x \in A_\alpha)\}$
משפט 1.28	$A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \subseteq A_{\alpha_0}$
משפט 1.29 (כללי הפילוג)	$B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(B \cap A_\alpha)$ $B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(B \cup A_\alpha)$

3 יחסים

3.1 בסיס

מכפלה קרטזית – נסמן $\times$ יהיו A, B קבוצות. המכפלה הקרטזית של A ב-B היא קבוצת הזוגות הסדורים שבהם משמאל מופיע איבר של A ומימין מופיע איבר של B. מכפלה קרטזית זו מסומנת $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

משפט 2.3: לכל A, B, C מתקיים:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$
$$(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$$

שאלה 3: $A \times B = \emptyset$ אם ורק אם $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$.

יחס דו-מקומי (יחס בקצרה) – בהינתן קבוצות A, B והמכפלה הקרטזית שלהן $A \times B$.
תת קבוצה R של $A \times B$ תקרא יחס דו-מקומי מ-A ל-B: $R \subseteq A \times B$.
ותת-קבוצה R של $A \times A$ תקרא יחס דו-מקומי על A: $R \subseteq A \times A$.

3.2 סוגי יחסים

היחס הריק – מהקבוצה A לקבוצה B הוא יחס שכל זוג סדור $\langle a, b\rangle \in A \times B$ איננו נמצא בו וסימונו יהיה $\emptyset$.

היחס המלא – מהקבוצה A לקבוצה B הוא יחס שכל זוג סדור $\langle a, b\rangle \in A \times B$ נמצא בו ולכן היחס המלא הוא בעצם $A \times B$.

יחס השוויון – מהקבוצה A לקבוצה A וסימונו הוא I_A והגדרתו הינה:

$$I_A \triangleq \{\langle a, a\rangle \mid \forall a \in A\}$$

היחס ההופכי – בהינתן קבוצות A, B, ויחס R מ-A ל-B, אזי היחס ההופכי יסומן על-ידי R^{-1} והוא יהיה מ-B ל-A המוגדר כך:

$$R^{-1} \triangleq \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

3.3 הגדרות

רפלקסיביות – יחס R מקבוצה A לקבוצה A יקרא רפלקסיבי:
אם לכל $a \in A$ מתקיים $\langle a, a\rangle \in R$.
דרך נוספת: $\forall a \in A \Rightarrow aRa$.
רעיון שקול: $I_A \subseteq R$ "כל איבר נמצא עם עצמו ביחס".

אנטי-רפלקסיביות – יחס R מקבוצה A לקבוצה A יקרא אנטי-רפלקסיבי:
אם לכל $a \in A$ מתקיים $\langle a, a\rangle \notin R$.
דרך נוספת: $\forall a \in A \nRightarrow aRa$.
אינטואיציה: "אף איבר לא נמצא עם עצמו ביחס".

סימטריות – יחס R מעל קבוצה A יקרא סימטרי אם ורק אם $R = R^{-1}$:
אם לכל $a, b \in A$ המקיימים $\langle a, b\rangle \in R$ מתקיים גם $\langle b, a\rangle \in R$.
אינטואיציה: "אם יש זוג ביחס אז ההופכי שלו חייב להופיע ביחס גם כן".

אנטי-סימטריות – יחס R מעל קבוצה A יקרא אנטי-סימטרי:
אם לכל $a, b \in A$ המקיימים $\langle a, b\rangle \in R$ מתקיים גם $\langle b, a\rangle \notin R$.
כלומר, $R \cap R^{-1} = \emptyset$. ובמילים אחרות – אנטי סימטריות שלא מאפשרת לזוגות מהצורה $\langle a, a\rangle$ להיות ביחס, כלומר היחס בפרט גם אנטי-רפלקסיבי.
הערה: ישנה הגדרה פחות "נוקשה" האומרת לכל $a \neq b \in A$ המקיימים $\langle a, b\rangle \in R$ מתקיים גם $\langle b, a\rangle \notin R$.
אינטואיציה: "אם יש זוג ביחס אז אסור להופכי שלו להופיע ביחס, והזוגות שמעניינים אותנו הם כאלו שאיבריהם שונים".
ואנחנו נתייחס אליו כיחס אנטי-סימטרי במובן הרחב.

טרנזיטיביות – יחס R מעל קבוצה A יקרא טרנזיטיבי:
אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים $\langle a, b\rangle \in R$ וגם $\langle b, c\rangle \in R$ אז יתקיים $\langle a, c\rangle \in R$.
אינטואיציה: "אם יש שני זוגות סדורים ביחס עם איבר מקשר אז האיברים המקושרים יופיעו גם כזוג ביחס".

עבודה נכונה עם יחס שמוגדר על-ידי תנאי: המבנה לרוב יוצג כך:

$$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow \text{relation conidtion}$$

1. אם אנחנו מניחים כי $\langle a, b\rangle \in R$, אז אנחנו משתמשים ב-r"c כנתון.
2. אם אנחנו שואלים "האם $\langle a, b\rangle \in R$", אז חייבים לבדוק האם ה-r"c מתקיים עבור הזוג הסדור $\langle a, b\rangle$ בהתאם לנתון.

3.4 חלוקות ויחסי שקילות

יחס שקילות – יחס R על קבוצה A הוא יחס שקילות אם ורק אם R יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

חלוקה של קבוצה – בהינתן קבוצה לא ריקה A ותתי-הקבוצות $A_1, \dots, A_n$ של A, אז הקבוצה $\{A_1, \dots, A_n\}$ נקראת חלוקה של A אם מתקיים:

1. לכל $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$ (זרות בזוגות).
2. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

כלומר המחלקות זרות בזוגות ואיחודן הוא A, לכן זוהי חלוקה.

טענה המקשרת בין יחס שקילות לחלוקה – בהינתן קבוצה $A \neq \emptyset$ ובהינתן יחס R המהווה יחס שקילות מעל A, אז היחס R משרה חלוקה יחידה של A באופן הבא:
עבור כל $a \in A$ נגדיר:

$$[a]_R = s_a \triangleq \{b \in A \mid bRa\} = \{b \in A \mid \langle b, a\rangle \in R\}$$

ואז החלוקה הינה:

$$\pi = \{S_a \mid a \in A\}$$

נשים לב שבעצם החלוקה π סך-הכל אומרת "להסתכל" על כל איבר ב-A ולכן אין פה דרישה לכך שהקבוצה A תהיה סופית.

קבוצת המנה – יהי R יחס שקילות מעל קבוצה A. קבוצת מחלקות השקילות של R נקראת קבוצת המנה של A מעל R, וסימונה A / R. אם קבוצת המנה היא סופית, נכנה את מספר איבריה, דהיינו את מספר מחלקות השקילות, בשם **האינדקס** של R. אם קבוצת המנה היא אינסופית, אומרים שהאינדקס אינסופי.

3.5 יחסי סדר

בהינתן יחס סדר R מעל קבוצה A:
יחס סדר חלש (לא בחומר) מעל $A \Leftrightarrow R$ רפלקסיבי וטרנזיטיבי.
יחס סדר חזק מעל $A \Leftrightarrow R$ אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי.
יחס סדר חלקי $\Leftrightarrow R$ יחס סדר חלש או חזק.
יחס סדר מלא אם:

- R יחס סדר חלקי.
- R יחס משווה, כלומר:
לכל $a, b \in A$ מתקיים aRb או bRa או $a = b$ והמשמעות היא שכל שני איברים ב-A הם ברי השוואה על-ידי היחס R.

3.6 ראשון, אחרון, מינימלי ומקסימלי

בהינתן קבוצה A ויחס סדר חלקי R מעל A, אז:
איבר ראשון $a \in A$, אם לכל $x \in A$ מתקיים aRx או $x = a$.
איבר אחרון $b \in A$, אם לכל $x \in A$ מתקיים xRb או $x = b$.
איבר מינימלי $a \in A$, אם לא קיים $x \in A$ המקיים xRa.
איבר מקסימלי $b \in A$, אם לא קיים $x \in A$ המקיים bRx.
הערה: ניתן להתייחס לזוג הסדור $\langle A, R\rangle$ ולקרוא לו "קבוצה סדורה חלקית" או אם R סדר מלא, אז $\langle A, R\rangle$ "קבוצה סדורה" וכמובן שקבוצה סדירה $\langle A, R\rangle$ היא בפרט קבוצה סדורה חלקית.

1. בקבוצה A יש לכל היותר איבר ראשון אחד.
2. בקבוצה A יש לכל היותר איבר אחרון אחד.

הקשר בין איבר ראשון ואחרון למינימלי ומקסימלי:

1. איבר ראשון ב-$\langle A, R\rangle$ הוא מינימלי ואיבר אחרון ב-$\langle A, R\rangle$ הוא מקסימלי.
2. אם $\langle A, R\rangle$ מהווה קבוצה סדורה אז:
   - $a \in A$ הוא איבר ראשון $\Leftrightarrow a$ איבר מינימלי.
   - $b \in A$ הוא איבר אחרון $\Leftrightarrow b$ הוא איבר מקסימלי.

משפט קיום איבר מינימלי ומקסימלי – בהינתן קבוצה סופית A ויחס סדר חלקי R מעל, אז הקבוצה A בעלת איבר מינימלי ואיבר מקסימלי.

4 פונקציות, הוכחות

4.1 הגדרות ומושגים

פונקציה היא שלשה סדורה $\langle A,B,\mathcal{g}\rangle$ כאשר A,B הן קבוצות ו-$\mathcal{g}$ תת קבוצה של $A\times B$, שלכל x ב-A קיים y יחיד ב-B המקיים $\langle x,y\rangle\in\mathcal{g}$.

הקבוצה A לא ריקה תיקרא **תחום** הפונקציה. הקבוצה B לא ריקה תיקרא **טווח** הפונקציה, ו-$\mathcal{g}$ תיקרא **גרף** הפונקציה.

התמונה של C לפי פונקציה f , $f(C)=\{f(x)\mid x\in C\}$.

המקור של D לפי פונקציה f , $f^{-1}(D)=\{x\in A\mid f(x)\in D\}$.

פונקציית הזהות - יהיו A,B קבוצות לא ריקות כך ש-$A\subseteq B$, פונקציית הזהות מ-A ל-B היא הפונקציה $f\colon A\to B$, שלכל x ב-A $f(x)=x$.

פונקציה קבועה - $f\colon A\to B$ תיקרא פונקציה קבועה אם יש לה ערך אחד ויחיד, בתמונה של f יש רק איבר אחד.

אוסף התמונות לפי פונקציה f, עבור $X\subseteq A$,
$f[X]=\{f(x)\mid\forall x\in X\}$ ומתקיים $f[X]\subseteq B$.

אוסף המקורות לפי פונקציה f, עבור $Y\subseteq B$,
$f^{-1}[Y]=\{x\in A\mid f(x)\in Y\}$ ומתקיים $f^{-1}[Y]\subseteq A$.

הגדרת הרכבה של פונקציות יהיו $f\colon A\to B,\ g\colon C\to D$ פונקציות כך ש-$D\subseteq A$ ומתקיים: $f\circ g(x)=f(g(x))$.

4.2 הוכחות ומשוואות

אינדוקציה מתמטית:

אם תכונה מסוימת:

א. מתקיימת לגבי 0

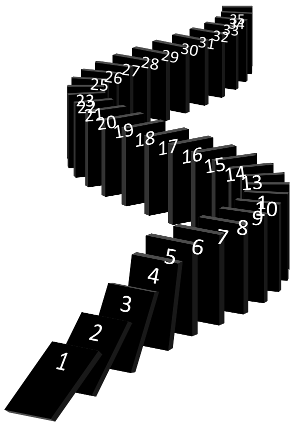
ב. לכל n טבעי שמקיים תכונה זו גם, $n+1$ מקיים תכונה זו, אז כל המספרים הטבעיים מקיימים זאת.

בסיס האינדוקציה - נבדוק את הטענה עבור ה-"n הראשון" במשוואה בדר"כ $n=0$ ונראה שהיא אכן מתקיימת.

הנחת האינדוקציה - נניח עבור כי $n\in\mathbf{N}$ כלשהו מתקיימת התכונה בשאלה.

צעד האינדוקציה – נפתור לפי הנחת האינדוקציה.

הוכחנו, מאינדוקציה לכל $n\in\mathbf{N}$ מתקיימת התכונה בשאלה.



נוסחה לחישוב מספר פונקציות העל – מספר הפונקציות מ-A על B כאשר $|A|=n\ ,\ |B|=k$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

סדרה חשבונית

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$

סדרה הנדסית

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

משוואה ריבועית

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

4.3 פונקציה חד-חד-ערכית

פונקציה $f\colon A\to B$ היא חח"ע אם ורק אם

- לכל $x_1,x_2\in A$ אם $x_1\neq x_2$ מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$.
- לכל $x_1,x_2\in A$ אם $f(x_1)=f(x_2)$ מתקיים $x_1=x_2$.

f is an injection

4.4 פונקציית על

- פונקציה $f\colon A\to B$ היא על B אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ ומתקיים $f(x)=y$.
- פונקציה $f\colon A\to B$ היא אינה על אס"ם קיים $y\in B$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)\neq y$.

f is an surjection

4.5 כדאי לדעת

מספר ראשוני – $p\in\mathbf{N}$ גדול ממש מאחד ייקרא ראשוני אם ורק אם המחלקים היחידים שלו הוא בעצמו והספרה אחת. שקול לכך שלא קיימים טבעיים m,n השונים מ-1 כך שניתן לייצג את p כמכפלה שלהם.

$$\neg\exists m\exists n(p=mn\wedge m\neq 1\wedge n\neq 1)\equiv$$

$$\overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}\quad\forall m\forall n\ (p\neq mn\vee m=1\vee n=1)$$

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41
,43,47,59,61,67,71,73,79,83,89,97, ...

חילוק של פולינומים

נניח נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1+x^2+x^4}{1-x^6}$

נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{l}
-x^2+1\\
\hline
-x^6+1\quad |x^4+x^2+1\\
\underline{-x^6-x^4-x^2}\\
\quad x^4-x^2+1\\
\quad \underline{x^4+x^2+1}\\
\qquad 0
\end{array}$$

אי לכך נקבל:

$$(1-x^6)=(1-x^2)(1+x^2+x^4)$$

תכונת ארכימדס – לכל מספר ממשי קיים מספר טבעי גדול ממנו.

מסקנה מתכונת ארכימדס:

1. לכל $c>0$ קיים n טבעי כך ש-$\frac{1}{n}<c$
2. לכל $a,b>0$ קיים n טבעי כך ש-$na>b$

5 עוצמות

5.1 בסיס

יהיו A ו- B קבוצות. אם קיימת פונקציה **חד-חד-ערכית ועל** מ-A על B, נאמר ש-A שקולה ל-B, והסימון יהיה $A \sim B$. נאמר גם ש-A **שוות עוצמה** ל-B.	$\lvert A\rvert = \lvert B\rvert$ **בייקציה**
יהיו A ו- B קבוצות. • אם קיימת פונקציה **חד-חד-ערכית** מ-A ל- B, נאמר ש-A **לכל היותר העוצמה** של-B. • אם קיימת פונקציה **על** מ-A ל- B, נאמר ש-A **לכל הפחות העוצמה** של-B. • אם $B \subseteq A$ אז $\lvert B\rvert \le \lvert A\rvert$. • $\lvert B\rvert \le \lvert A\rvert$ אם ורק אם A שוות עוצמה לקבוצה חלקית של B.	$\lvert A\rvert \le \lvert B\rvert$ $\lvert A\rvert \ge \lvert B\rvert$
עבור **קבוצות סופיות**: אם $B \subset A$ אז מתקיים:	$\lvert A\rvert < \lvert B\rvert$
יהיו A ו- B קבוצות. אז B^A היא קבוצת הפונקציות מ-A ל-B ומתקיים:	$\lvert B^A\rvert = \lvert B\rvert^{\lvert A\rvert}$
משפט 4.42	$\lvert\mathcal{P}(A)\rvert = 2^{\lvert A\rvert}$
משפט 4.43: לכל עוצמה k, $k < 2^k$	$k < 2^k$
קבוצת בת–מנייה אם היא סופית, או שקולה ל-$\mathbf{N}$. $\mathbf{Z}$ קבוצת המספרים השלמים, ו-$\mathbf{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים הן בנות–מנייה, ועוצמתן היא $\aleph_0$. כל קבוצה החלקית לקבוצה בת–מנייה היא בת–מנייה. לכל קבוצה אינסופית יש תת-קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$.	$\lvert\mathbf{N}\rvert = \lvert\mathbf{Z}\rvert = \lvert\mathbf{Q}\rvert = \aleph_0$ $\lvert\emptyset\rvert = 0$ $\lvert A\rvert \ge \aleph_0$
• קבוצה שאינה בת–מנייה היא אינסופית, ובכן נראה קבוצה אינסופית שאינה שקולה ל-$\mathbf{N}$, לכן עוצמתה אינה $\aleph_0$. • $\boldsymbol{R}$ קבוצת המספרים הממשיים אינה בת–מנייה.	$\lvert\mathbf{R}\rvert = \lvert\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\rvert = \mathbf{Q}^c = \aleph$ $\lvert\mathbf{R} \setminus (0,1)\rvert = \lvert\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}\rvert = \aleph$

עוצמת כל קטע ב-R היא א

5.2 דוגמאות חישוב

$\aleph \cdot \aleph = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$	$\aleph \cdot \aleph = \aleph$
$4^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = \aleph \cdot \aleph = \aleph$	$4^{\aleph_0} = \aleph$
$\overset{\text{קש"ב}}{\Longleftarrow} \aleph = 2^{\aleph_0} \le 3^{\aleph_0} \le 4^{\aleph_0} = \aleph$	$3^{\aleph_0} = \aleph$
$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$	$\aleph^{\aleph_0} = \aleph$
$\overset{\text{קש"ב}}{\Longleftarrow} \aleph = 2^{\aleph_0} \le {\aleph_0}^{\aleph_0} \le \aleph^{\aleph_0} = \aleph$	$\aleph^{\aleph_0} = \aleph$
$\forall n \{n \in \mathbf{N} \mid n \ge 2\}$	$n^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0} = \aleph$
$\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph} = 2^{\aleph} = \aleph'$	$\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph} = \aleph'$
$\overset{\text{קש"ב}}{\Longleftarrow} \aleph' \le {\aleph_0}^{\aleph} \le \aleph^{\aleph} = \aleph'$	${\aleph_0}^{\aleph} = 2^{\aleph} = \aleph'$
$\lvert\{f \mid f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}\}\rvert = \lvert\mathbf{N}^{\mathbf{N}}\rvert = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$	
$\lvert\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\rvert = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$	

5.3 כפל עוצמות

יהיו A, B כלשהן, אז $\lvert A \times B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$.

לכל עוצמה κ: $\kappa \cdot 1 = \kappa \ , \ \kappa \cdot 0 = 0$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph \cdot \aleph = \aleph$$

שאלה 38: אם $1 \le \kappa \le \aleph_0$, אז $\aleph_0 \cdot \kappa = \aleph_0$.

שאלה 38: אם $1 \le \kappa \le \aleph$, אז $\aleph \cdot \kappa = \aleph$.

5.4 חיבור עוצמות

יהיו A, B זרות, אז $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$.

לכל עוצמה κ: $\kappa + 0 = \kappa$

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph + \aleph = \aleph$$

תהי κ עוצמה אינסופית אז, $\kappa + \aleph_0 = \kappa$.

5.5 חוקי חזקות

$$(\lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert)^{\lvert C\rvert} = \lvert A\rvert^{\lvert C\rvert} \cdot \lvert B\rvert^{\lvert C\rvert}$$

$$\lvert A\rvert^{\lvert B\rvert + \lvert C\rvert} = \lvert A\rvert^{\lvert B\rvert} \cdot \lvert A\rvert^{\lvert C\rvert}$$

$$\left(\lvert A\rvert^{\lvert B\rvert}\right)^{\lvert C\rvert} = \lvert A\rvert^{\lvert B\rvert \cdot \lvert C\rvert}$$

$$\lvert A\rvert \le \lvert B\rvert \Rightarrow \begin{cases} \lvert A\rvert^{\lvert C\rvert} \le \lvert B\rvert^{\lvert C\rvert} \\ \lvert C\rvert^{\lvert A\rvert} \le \lvert C\rvert^{\lvert B\rvert} \end{cases}$$

5.6 משפטים חשובים

משפט קנטור שרדר ברנשטיין (קש"ב): λ, μ עוצמות.

אם $\mu \le \lambda$ וגם $\lambda \le \mu$ אז $\lambda = \mu$.

משפט קנטור: $\lvert\mathcal{P}(A)\rvert > \lvert A\rvert$.

צפיפות המספרים הרציונליים: קבוצה $A \subseteq \mathbf{R}$ נקראת קבוצה צפופה ב-$\mathbf{R}$ אם לכל $x < y$ קיים $a \in A$ כך ש- $a \in (x, y)$. במילים אחרות, קבוצה היא צפופה ב-$\mathbf{R}$ אם בכל קטע פתוח יש איבר מהקבוצה. קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbf{Q}$ צפופה ב-$\mathbf{R}$.

5.7 סדר של עוצמות

$\aleph' > \aleph > \aleph_0 >$ סופית ערך טבעי

- חיתוך של שתי קבוצות שלפחות אחת מהן בת-מנייה, היא קבוצה בת-מנייה.
- אם A היא קבוצה בת-מנייה ו-B היא קבוצה כלשהי, אז $A \setminus B$ בת-מנייה.
- אם הקבוצות $A_1 \dots, A_n$ הן בנות-מנייה, אז גם הקבוצה $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ בת-מנייה.
- אם לכל n טבעי A_n היא קבוצה בת-מנייה, אז גם $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ היא קבוצה בת-מנייה.
- אם A, B בנות-מנייה, אז גם $A \times B$ בת-מנייה.
- אם $f\colon A \to B$ היא פונקציה על ו-A בת-מנייה, אז גם B בת-מנייה.
- אם $f\colon A \to B$ היא חד-חד-ערכית ו-B בת-מנייה, אז גם A בת-מנייה.
- אם A קבוצה שאינה בת-מנייה ו-B תת קבוצה שלה, שהיא בת-מנייה, אז $A \setminus B$ אינה בת-מנייה.

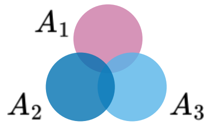
5.8 קבוצות של מספרים

בקורס 0 הוא איבר **טבעי שלם וזוגי**.

המספרים הטבעיים	$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$
המספרים השלמים	$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
המספרים הרציונליים	$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \,\middle\vert\, m, n \in \mathbf{Z}, n \ne 0\right\}$ (דגש: גם כל מספר שלם הוא מספר רציונלי: שבר שהמכנה שלו הוא 1).
המספרים האי-רציונליים	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \{\ln 2, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \dots\}$
המספרים הממשיים	$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$

6 קומבינטוריקה

6.1 עקרון ההכלה וההפרדה (הכלה והדרה)



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$(|A_1|+|A_2|+|A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$$

תהי U הקבוצה האוניברסלית ומתקיים $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq U$

$\binom{n}{0}$	$S_0 = \lvert U\rvert$
$\binom{n}{1}$	$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \lvert A_i\rvert = \lvert A_1\rvert + \lvert A_2\rvert + \cdots + \lvert A_n\rvert$
$\binom{n}{2}$	$S_2 = \sum_{1\le i<j\le n}^{n} \lvert A_i \cap A_j\rvert$
$\binom{n}{3}$	$S_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} \lvert A_i \cap A_j \cap A_k\rvert$
$\binom{n}{k}$	$S_k = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}^{n} \lvert A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\rvert$
$\binom{n}{n}$	$S_n = \lvert A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\rvert$

ואז מתקיים $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$

גרסת המשלים: $|U - A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + - \cdots + (-1)^n S_n$

6.2 משולש פסקל

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{n-k},\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

6.3 פונקציות יוצרות

סכום סדרה הנדסית אינסופית	$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + \lambda x + \lambda x^2 + \cdots = \frac{1}{1-\lambda x}$
סכום סדרה הנדסית סופית כאשר $x \neq 1$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
הפונקציה היוצרת של המקדמים הבינומיים	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$
נוסחת הבינום של ניוטון	$\sum_{k=0}^{n \text{ or } \infty} \binom{n}{k} x^k \cdot a^{n-k} = (x+a)^n$ $\sum_{k=0}^{n \text{ or } \infty} \binom{n}{k} (-x)^k \cdot a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n \text{ or } \infty} (-1)^k \binom{n}{k} x^k a^{n-k} = (a-x)^n$
נוסחת הבינום השלילית	$\sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) \cdot x^k = (1 + x + x^2 + \cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$
פיתוח מולטינומי	$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \left(\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}\right) x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$
כפל בין טורים כאשר $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$	$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum c_k x^k$
דוגמאות	$\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3)^k = \frac{1}{1-x^3}$ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x^2)^k = (1-x^2)^n$

עקרון החיבור

אם אפשר לבחור איבר אחד ב-x_1 דרכים ולבחור איבר שני ב-x_2 דרכים ... ולבחור איבר n ב-x_n דרכים, כך שרוצים לבחור בדיוק איבר אחד אז יש $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ דרכים לבחור אותו.

עקרון הכפל

אם אפשר לבחור איבר אחד ב-x_1 דרכים ולבחור איבר שני ב-x_2 דרכים ... ולבחור איבר n ב-x_n דרכים, כך שרוצים לבחור n איברים שונים אז יש $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ דרכים לבחור אותו.

עקרון שובך יונים אם יש m תאים בשובך לתוכם יש להכניס n יונים, בוודאות יהיה תא אחד שבו יהיו לפחות $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ (הערך השלם העליון) יונים.

מושגי יסוד:

אין חזרות: ברגע שנעשה שימוש באיבר אין לעשות בו שימוש שוב.

אין חשיבות לסדר הבחירה: הבחירה של 213 או 321 היא בחירה אחת של המספרים 123.

6.4 פרמוטציות וקומבינציות

תמורות (פרמוטציות) ללא חזרות

סידור של n איברים שונים, יש חשיבות לסדר הבחירה ואין חזרות.

(סידור של n ספרים שונים על מדף).

$$\boldsymbol{P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 1 = n!}$$

תמורות (פרמוטציות) עם חזרות

מספר התמורות של n איברים כאשר יש m סוגים של איברים שונים, יש חשיבות לסדר הבחירה ויש חזרות.

(סידור של n ספרים על מדף כאשר קיימים ספרים עם k_i עותקים. או בכמה אופנים שונים ניתן לסדר את המילה Mississippi).

$$\boldsymbol{P(n; k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m!}}$$

חליפות ללא חזרות

חליפה כלומר סידור של איברים שונים. חליפה של k איברים שונים מתוך n איברים שונים, יש חשיבות לסדר הבחירה ואין חזרות.

(הושבו על ספסל k נציגים מתוך n תלמידים).

$$\boldsymbol{P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

חליפות עם חזרות

מספר החליפות עם חזרות של k איברים מתוך n איברים שונים, יש חשיבות לסדר הבחירה ויש חזרות.

(מספר הפונקציות מ-$\{1,2,3,4,5\}$ ל-$\{a,b,c\}$ או מספר המילים באורך 6 שאפשר לבנות מהאותיות a,b,c – אות יכולה להופיע יותר מפעם אחת).

$$\boldsymbol{n \cdot \dots \cdot n = n^k}$$

צירופים (קומבינציות) ללא חזרות

צירוף k איברים שונים מתוך n איברים שונים.

אין חשיבות לסדר הבחירה ואין חזרות.

($abc\ acb\ bac$ נספרות כאותה החליפה, ואין חשיבות לסדר, ולכן נחלק במספר התמורות של אותם איברים).

$$\boldsymbol{C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}}$$

צירופים (קומבינציות) עם חזרות

מספר הדרכים לפזר k איברים זהים בתוך n תאים שונים.

אין חשיבות לסדר הבחירה ויש חזרות.

(8 $= x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ או בחירה של 8 סופגניות מתוך 4 סוגים שונים זה כמו לבחור 8 פעמים מתוך 4 אפשרויות; שקול למספר המילים הבינאריות עם k אפסים ו-n-1 אחדים המהווים מחיצה).

$$\boldsymbol{D(n,k) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}}$$

6.5 רקורסיה ליניארית

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

כדי למצוא נוסחה מפורשת עבור a_n פותרים את המשוואה האופיינית של יחס הרקורסיה:

נציב $a_n = \lambda^n$ בנוסחת הרקורסיה ונקבל

$$\lambda^n = c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2}$$

נפשט $\lambda^{n-2}(\lambda^2 - c_1\lambda - c_2) = 0$

נמצא שורשים **למשוואה האופיינית**: $\boldsymbol{\lambda^2 - c_1\lambda - c_2 = 0}$

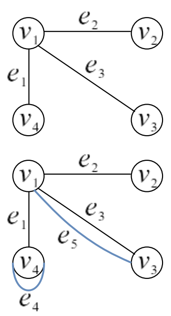
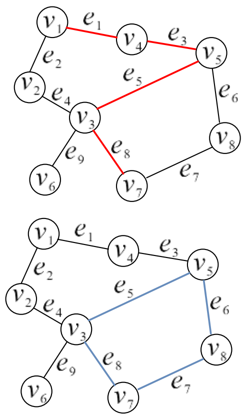
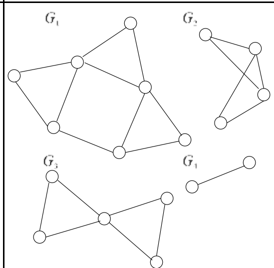
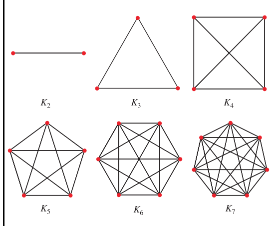
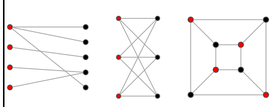
את השורשים $\lambda_1 \neq \lambda_2$ נציב בתבנית:

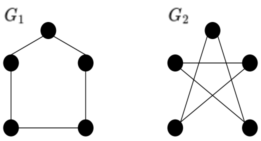
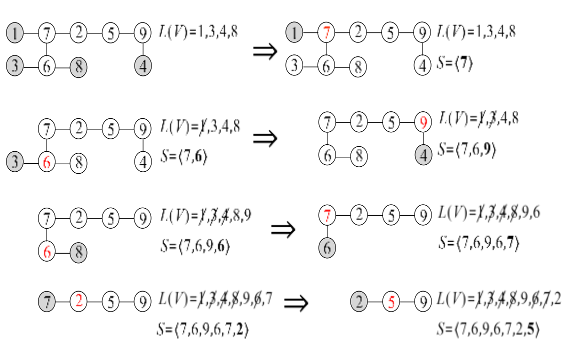
$$\boldsymbol{a_n = A{\lambda_1}^n + B{\lambda_2}^n}$$

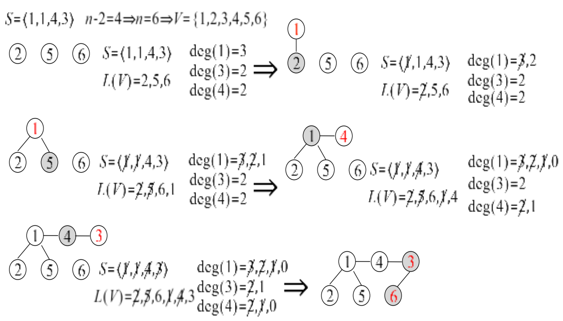
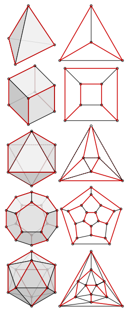
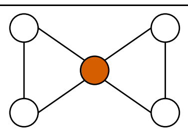
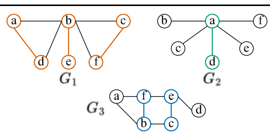
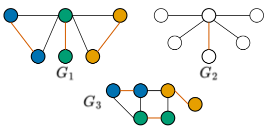
(אם קיים שורש **יחיד** אז נציב בתבנית: $a_n = A\lambda^n + Bn\lambda^n$).

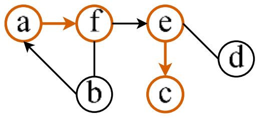
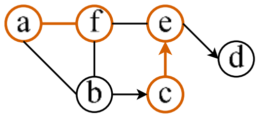
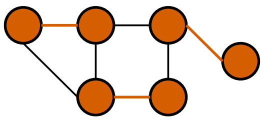
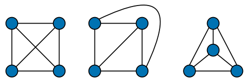
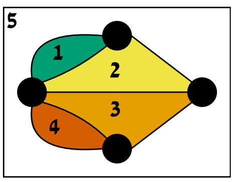
באמצעות התנאים התחיליים: a_0, a_1, a_2 , מספיקים שניים מהם, נמצא את הקבועים A, B ונציב אותם בתבנית.

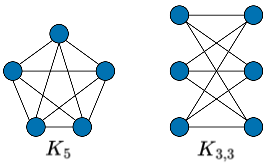
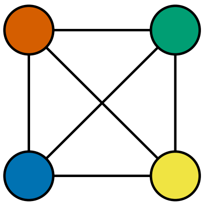
7 תורת הגרפים

מס'	ניסוח המשפט	שרטוט	כתיב מתמטי
1.1	גרף $G=(V,E)$ כאשר V זו קבוצת הצמתים ו- E זו קבוצת הקשתות. v כלומר $vertex$ נקרא **צומת**. e כלומר $edge$ נקרא **קשת**. **גרף פשוט**: גרף ללא לולאות וללא קשתות מקבילות. **דרגה של צומת**: נסמן $deg_G(v)$ כלומר מספר הקשתות המחוברות לצומת. לולאה נספרת פעמיים. **צומת מבודד**: הוא צומת שאין לו צמתים שכנים.		$V=\{v_1,\dots,v_n\}$ $E=\{e_1,\dots,e_n\}$
1.3	סכום הדרגות בגרף שווה לפעמיים מספר הקשתות, כלומר סכום הדרגות תמיד זוגי.		$\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2\|E\|$
	בכל גרף מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית הוא תמיד מספר זוגי. **מסלול**: מסלול המחבר שני צמתים על-ידי רצף של צמתים וקשתות. אורכו שווה למספר הקשתות שבו. במסלול אין חזרה על קשתות פעמיים. **אורך מסלול**: הוא מספר הקשתות במסלול ומסומן ב-$\|P\|$ **מסלול סגור או מעגל**: הוא מסלול שבו צומתי הקצה זהים, כלומר $v_0=v_k$. צומת בודד אינו מעגל, אלא אם יש קשת לעצמו. כלומר חייב להכיל לפחות קשת אחת. **מסלול פשוט**: הוא מסלול שבו כל הצמתים שונים, כלומר המסלול אינו חותך את עצמו (לא חוזרים על צמתים). **מעגל פשוט**: הוא מסלול פשוט שצומתי הקצה שלו זהים.		$P=e_1,\dots,e_k$ או בכתיב אחר: $P=v_1,\dots v_k$ המסלול האדום: $P=e_1,e_3,e_5,e_8$ מסלול סגור או מעגל (כחול).
	גרף קשיר: גרף בו בין כל שני צמתים קיים מסלול. **רכיב קשירות**: תת קבוצה לגרף בה בין כל שני צמתים קיים מסלול (תת גרף מקסימלי של G שהוא קשיר).		רכיבי הקשירות בגרף המשורטט ישנם 4 רכיבי קשירות: $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4$
1.4	**גרף מלא**: גרף בו כל צומת (n) מחובר לכל הצמתים האחרים. **גרף משלים**: גרף המשלים גרף כלשהו לגרף מלא, כלומר שני צמתים יהיו מחוברים בקשת בגרף המשלים **אם ורק אם** הם אינם מחוברים בקשת בגרף המקורי. **גרף מעגל פשוט**: נהוג לסמן אותו ב-C_n המורכב מ-n קשתות ו-n צמתים. דרגת כל צומת היא 2. <u>לא בהכרח גרף פשוט</u>, לדוגמה C_1 שהיא צומת אחד עם לולאה.		מספר הקשתות בגרף מלא: $K_n=\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$ לדוגמה $K_3=C_3$ הוא גרף מעגל פשוט.
1.5	**גרף דו-צדדי**: גרף שניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות לא ריקות A,B כך שלכל קשת של G יש קצה אחד ב-A וקצה שני ב-B. לשתי הקבוצות נקרא הצדדים של הגרף. **גרף דו-צדדי מלא**: $K_{p,q}$ הוא גרף דו-צדדי פשוט בעל p צמתים בצד אחד ובעל q צמתים בצד השני ומכיל את כל $p\cdot q$ הקשתות האפשריות.		אלגוריתם להפיכת גרף דו-צדדי: לוקחים צומת כלשהו ונצבע אותו בצבע, כלומר נשייך אותו לקבוצה נניח A וכל שכניו חייבים להיות בקבוצה אחרת נניח B וצבע אחר וכן הלאה.
1.6	**משפט**: גרף G בעל שני צמתים לפחות הוא **דו-צדדי**, **אם ורק אם** אין בו מעגל באורך אי זוגי.		

2.1	**יער** : גרף שכל רכיב קשירות שלו הוא עץ, כלומר אם אין בו מעגל. **עץ** : גרף קשיר ללא מעגלים (יער קשיר).		
2.2	**עלה** : צומת בעץ נקרא עלה, אם דרגתו בגרף היא בדיוק 1.		
2.5	הטענות הבאות שקולות (**אם ורק אם**) : G הוא **עץ**. בין כל שני צמתים של G יש מסלול יחיד. G הוא גרף קשיר מינימלי (במובן זה שהוא גרף קשיר ועם השמטת כל קשת ממנו מתקבל גרף לא קשיר). G קשיר ומתקיים $\|E\| = \|V\| - 1$ G אינו מכיל מעגלים ומתקיים $\|E\| = \|V\| - 1$ G אינו מכיל מעגלים, אבל כל קשת שנוסיף בין הצמתים הקיימים בגרף תיצור מעגל.		מספר הקשתות בעץ שווה למספר הצמתים פחות אחד : $\|E\| = \|V\| - 1$ מספר הקשתות ביער עם k עצים שווה למספר הצמתים פחות מספר רכיבי הקשירות : $\|E\| = \sum_{i=1}^{k} E_i = \sum_{i=1}^{k} (\|V_i\| - 1)$ $= \|V\| - k$
שאלה 3 עמ' 21	**משפט** : בכל עץ בעל לפחות שני צמתים יש לפחות שני עלים.		
2.6	**עץ פורש** : הוא תת גרף קשיר של G, המכיל את כל צומתי G, ואין לו מעגלים. תת גרף כזה הוא עץ.		
2.7	**איזומורפיזם של גרפים** : שני גרפים $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ ו- $G = (V, E)$ נקראים **איזומורפיים**, אם קיימת העתקה $f: V \to \hat{V}$ חד-חד-ערכית ועל, כך שלכל $u, v \in V$ מתקיים : $uv \in E$ **אם ורק אם** $f(u) \cdot f(v) \in \hat{E}$	 	$uv \in E \Leftrightarrow f(u) \cdot f(v) \in \hat{E}$ $G \cong \hat{G}$
	גרף מתויג : הוא גרף שלכל צומת מותאם מספר טבעי. לגרף בעל n צמתים יותאמו הטבעיים.		$\{1,2, \dots, n\}$
2.8	**איזומורפיזם של גרפים מתויגים** : שני גרפים מתויגים $G =$ (V, E) ו- $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ נקראים **איזומורפיים**, אם קיימת העתקה $f: V \to \hat{V}$ חד-חד-ערכית ועל, כך שלכל $u \in V$ התג של u שווה לתג של $f(u)$, ובנוסף מתקיים $uv \in E$ **אם ורק אם** $f(u) \cdot f(v) \in \hat{E}$.		$uv \in E \Leftrightarrow f(u) \cdot f(v) \in \hat{E}$
2.9	**משפט קיילי** : לכל $\|V\| = n \geq 2$ מספר העצים המתויגים השונים שניתן ליצור מ-V הוא n^{n-2}. **נוסח אחר למשפט קיילי** : מספר העצים הפורשים של הגרף השלם K_n על n צמתים מסומנים הוא n^{n-2}.		n^{n-2}
	סדרת פרופר (קוד פרופר) : מתאימה לכל עץ מתויג T על $\|V\| = n$ צמתים. ולהיפך לכל סדרת פרופר מאורך $n-2$ מתאים עץ יחיד (עד כדי איזומורפיזם). **משפט** : ההתאמה בין עצים לבין סדרות פרופר היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל. לכן **מספר העצים הוא כמספר הסדרות**. **משפט** : יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין עצים עם n צמתים וסדרות באורך $n-2$ הבנויות מהתגים $\{1,2, \dots, n\}$ כלומר חליפות עם חזרות באורך $n-2$ מתוך n איברים שונים.		$S = \langle S_1, S_2, \dots, S_{n-2} \rangle$ סדרה באורך $n-2$ לפי עוצמות נקבל $\|T_n\| = \|S_{n-2}\|$ T_n קבוצת העצים על n צמתים S_{n-2} קבוצת סדרות פרופר מאורך $n-2$
	בניית סדרת פרופר (קוד פרופר) של עץ מתויג : נתון עץ מתויג על $\|V\| = n$ צמתים ונבנה את הסדרה $S = \langle S_1, S_2, \dots, S_{n-2} \rangle$ ניצור רשימת עלים $L(V)$, החל מ $i = 1$ ועד $i = n - 2$. נאתר את העלה בעל התג הקטן ביותר מבין העלים, נסמן אותו ב-v_i. האיבר S_i יהיה השכן של v_i. נמחק את v_i מהגרף כולל הקשת המחברת אותו ל-S_i. נעדכן את רשימת העלים $L(V) \setminus \{v_i\}$ **ואם** S_i בשלב זה הפך להיות עלה, נוסיף אותו לרשימת העלים. **העלים לא מופיעים בסדרת פרופר.** **תגים שמופיעים x פעמים בסדרה, הדרגה שלהם היא $x + 1$.**		

	בניית עץ מתויג מסדרת פרופר (קוד פרופר): נתונה הסדרה $S=\langle S_1,S_2,\dots,S_{n-2}\rangle$ ונבנה עץ מתויג על $\|V\|=n$ צמתים. ניצור רשימת עלים $L(V)$, התגים שאינם מופיעים בסדרת פרופר. נכתוב את כל הדרגות של התגים בסדרה כך **שתגים שמופיעים x פעמים בסדרה, הדרגה שלהם היא $x+1$**. נאתר את העלה בעל התג הקטן ביותר מבין העלים, נסמן אותו ב-v_i. האיבר S_i יהיה השכן של v_i. נוסיף את v_i לגרף כולל הקשת המחברת אותו ל-S_i.נעדכן את רשימת העלים $L(V)\setminus\{v_i\}$ ואם S_i בשלב זה הפך להיות עלה, נוסיף אותו לרשימת העלים.		
3	**מסלול אוילר**: בגרף G הוא <u>מסלול</u> שבו כל <u>קשת</u> של G מופיעה בדיוק פעם אחת. **מעגל אוילר**: בגרף G הוא <u>מעגל</u> שבו כל <u>קשת</u> של G מופיעה בדיוק פעם אחת. **מסלול המילטון**: בגרף G הוא <u>מסלול</u> שבו כל <u>צומת</u> של G מופיעה בדיוק פעם אחת. **מעגל המילטון**: בגרף G הוא <u>מעגל</u> שבו כל <u>צומת</u> של G מופיעה בדיוק פעם אחת. **משפט**: גרף <u>קשיר</u> נקרא **אוילרי / המילטוני אם ורק אם** קיים בו <u>מעגל</u> **אוילר / המילטון** (בהתאמה).		בשרטוט ניתן לראות מסלולי המילטון שונים.
3.1	**משפט**: גרף <u>קשיר</u> G הוא **<u>אוילרי</u> אם ורק אם** דרגת כל צומת בו היא זוגית.		
שאלה 1 עמ' 37	**משפט**: גרף <u>קשיר</u> מכיל **<u>מסלול אוילר</u>** שאיננו מעגל **אם ורק אם** 2 מהצמתים בעלי דרגה אי-זוגית וכל השאר עם דרגה זוגית.		
שאלה 5 עמ' 38	**גרף d רגולרי**: אם דרגת כל צומת בו היא בדיוק d.		
3.2	**משפט אור**: עבור גרף פשוט על $\|V\|=n\geq 3$ צמתים כך <u>שלכל</u> זוג צמתים u,v <u>שאינם שכנים</u> מתקיים שסכום הדרגות שלהם גדול או שווה למספר הצמתים אז גרף זה **המילטוני** (תנאי מספק אך לא הכרחי).		$\deg_G(u)+\deg_G(v)\geq n$
3.3	**משפט דירך**: עבור גרף פשוט על $\|V\|=n\geq 3$ צמתים. אם הדרגה של כל צומת היא לפחות מחצית ממספר הצמתים אז הגרף **המילטוני** (תנאי מספק אך לא הכרחי).		$\deg_G(v)\geq\frac{n}{2}$
שאלה 6 עמ' 42	**תוספת למשפט דירך**: עבור גרף פשוט על $\|V\|=n\geq 3$ צמתים. כך שדרגת כל צומת היא לפחות $\frac{n}{2}-1$. אם n **אי-זוגי** אז הגרף **מכיל מסלול המילטון**.		$\deg_G(v)\geq\frac{n}{2}-1$
שאלה 7 עמ' 42	**משפט**: **בגרף דו-צדדי מלא** $K_{p,q}$ קיים **מעגל המילטוני אם ורק אם** $p,q\geq 2$ וגם $p=q$. (בצד אחד p צמתים ובשני q, וכל $p\cdot q$ הקשתות הקיימות).		$p,q\geq 2\ \wedge\ p=q$
	צומת מפרד: צומת בגרף קשיר יקרא צומת מפרד אם נשמיט אותו ואת הקשתות המחוברות אליו מהגרף ונקבל גרף שאינו קשיר. כאשר קיים צומת מפרד בגרף נוכל להכריע **שהגרף לא המילטוני** (מכיוון שנצטרך לעבור על צומת המפרד כמה פעמים וזה פוסל קיום <u>מעגל</u> המילטון).		
4.1	**זיווג** בגרף: תת קבוצה M של קשתות שלא כוללות את אותו צומת יותר מפעם אחת (שאין בה שתי קשתות הסמוכות לאותו הצומת).		$M_{G_1}=\{ad,be,cf\}$ $M_{G_2}=\{ad\}$ $M_{G_3}=\{bf,ec\}$
	זיווג מקסימום M בגרף: **אם ורק אם** לכל זיווג אחר M' בגרף מתקיים $\|M\|\geq\|M'\|$		
4.3	**זיווג מושלם** M בגרף: **אם ורק אם** הוא מזווג את כל הצמתים בגרף. כל זיווג מושלם הוא **זיווג מקסימום**, <u>אבל</u> לא כל זיווג מקסימום הוא זיווג מושלם. **זיווג מושלם <u>יכול</u> להתקיים רק אם מספר הצמתים בגרף הוא זוגי.**		$\|M\|=\frac{\|V\|}{2}$ זיווג מושלם (קשתות אדומות): M_{G_1},M_{G_3} אין זיווג מושלם ב-G_2

אנלוגי לשאלה 2.29 עמ' 36 (קומבי)	**נוסחה לחישוב מספר האפשרויות ליצור זיווג מושלם עבור גרף מלא מסדר זוגי (K_{2n}):** נבחר צומת כלשהי, כעת נותרו $2n-1$ דרכים לבחור צומת אחר כדי ליצור את הקשת. ואז כדי ליצור זוג נוסף נבחר צומת ואז נשאר $2n-3$ דרכים לבחור צומת אחר (מכיוון שהשתמשנו ב-2 צמתים מקודם לקשת) ואז אותו תהליך עבור הזוג השלישי נשאר $2n-5$ וכאשר נגיע לקשת $\frac{\|V\|}{2}$ אז יש לה דרך אחת. נחלק בהתאמה ונקבל: $$\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 4\cdot 2}$$	**אין זיווג מושלם בגרף מלא שהוא מסדר אי-זוגי** **כי זיווג מושלם <u>יכול</u> להתקיים רק אם מספר הצמתים בגרף הוא זוגי.**	$\frac{(2n)!}{2^n n!} \mid \|V\| = 2n$ או בכתיב אחר: $$\frac{\|V\|!}{(2!)^{\frac{\|V\|}{2}}\left(\frac{\|V\|}{2}\right)!}$$
4.4	**מסלול מתחלף** בגרף עם זיווג M: הוא מסלול שהקשתות בו הן מהזיווג M ושלא מ-M, לסירוגין. כלומר כל זוג קשתות סמוכות במסלול, האחת מהזיווג M והשנייה אינה מהזיווג.		זיווג: $M=\{af,ec\}$ מסלול מתחלף: $P=\{b,a,f,e,c\}$
	מסלול שיפור בגרף ביחס לזיווג M: הוא מסלול מתחלף שמתחיל בצומת שאינו מזווג ומסתיים בצומת (אחר) שאינו מזווג.		זיווג: $M=\{af,ec\}$ מסלול שיפור: $P=\{b,c,e,d\}$
4.6	**משפט ברג':** M הוא **זיווג מקסימום** בגרף **אם ורק אם** אין מסלול שיפור ביחס ל-M.		**אין צמתים חופשיים** (כלומר שאינם משתתפים בזיווג) ולכן אין מסלול שיפור, אז לפי משפט ברג': הזיווג מקסימום הוא בקשתות האדומות.
	סימון קבוצת השכנים: עבור תת קבוצה X של צמתים בגרף G אז $\Gamma_G(X)$, קבוצת השכנים של X מוגדרת להיות כל הצמתים שמחוברים בקשת לאיזשהו צומת ב-X.		
4.7	**משפט הול:** בגרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$ יש <u>**זיווג המזווג את כל צמתי A**</u> **אם ורק אם** לכל $X\subseteq A$ מתקיים $\|\Gamma_G(X)\|\geq\|X\|$.		$\|\Gamma_G(X)\|\geq\|X\|$
4.8	**מסקנה מהול:** בגרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$ יש <u>**זיווג מושלם**</u> **אם ורק אם** $\|A\|=\|B\|$ וגם לכל $X\subseteq A$ מתקיים $\|\Gamma_G(X)\|\geq\|X\|$.		$\|\Gamma_G(X)\|\geq\|X\|$
5.1	**גרף מישורי:** אם אפשר לשרטט אותו כך שהקשתות לא חותכות זו את זו. אם נתון **שיכון מישורי** של גרף אז הוא מחלק את המישור לחלקים. כל חלק נקרא **פאה**. בעץ יש פאה אחת בלבד כי אין בו מעגלים. החלק החיצוני, שאינו חסום, גם הוא פאה. מספר הפאות אינו תלוי באיזה שיכון מישורי בוחרים.		
5.3	**נוסחת אוילר:** יהי G גרף מישורי <u>קשיר</u> (ולא דווקא פשוט) בעל n צמתים ו-m קשתות. אז מספר הפאות בכל שיכון של G הוא לפי נוסחת אוילר.		$f=m-n+2$ או בכתיב אחר: $f=\|E\|-\|V\|+2$
5.4	**בגרף מישורי <u>פשוט</u> בעל $3\leq n$ צמתים** יש לכל היותר $3n-6$ קשתות. **K_5 אינו מישורי.** ב-K_5 יש $\frac{5\cdot4}{2}=10$ קשתות, כלומר יותר מ-$3\cdot5-6=9$.		$m\leq 3n-6$ או בכתיב אחר: $\|E\|\leq 3\cdot\|V\|-6$ **(בדרך כלל להוכיח שהגרף אינו מישורי)**
שאלה 3 עמ' 61	**בגרף מישורי דו-צדדי <u>פשוט וקשיר</u> בעל $3\leq n$ צמתים** יש לכל היותר $2n-4$ קשתות. **$K_{3,3}$ אינו מישורי.** ב-$K_{3,3}$ יש $3\cdot3=9$ קשתות, כלומר יותר מ-$2\cdot6-4=8$.		$m\leq 2n-4$ או בכתיב אחר: $\|E\|\leq 2\cdot\|V\|-4$

5.6	**עידון (חלוקה) של גרף** היא פיצול של קשת קיימת לשתי קשתות על-ידי הוספת צומת חדש.		
5.7	**גרף הוא מישורי אם ורק אם** כל העדנה שלו היא גרף מישורי.		
5.8	**משפט קורטובסקי: גרף הוא מישורי אם ורק אם** הוא לא מכיל כתת-גרף העדנה של K_5 <u>או</u> של $K_{3,3}$.		**הוכחה על גרף מסוים**: בגרף G לא קיימים לפחות 5 צמתים מדרגה הגבוהה או שווה ל-4 ולכן בפרט הגרף אינו מכיל העדנה של K_5. בגרף G לא קיימים 6 צמתים מדרגה גדולה או שווה ל-3 ולכן בפרט הגרף אינו מכיל העדנה של $K_{3,3}$. ממשפט קורטובסקי הגרף הינו מישורי. ■ <u>לבדוק אם יש אפשרות גם בעזרת מספר הקשתות לפי 5.4.</u>
6.1	**צביעה חוקית (נאותה)** של גרף היא <u>צביעה של הצמתים</u> כך שהשכנים צבועים בצבעים שונים $\chi(G)$ – **מספר הצביעה** של הגרף, הוא מספר הצבעים המינימלי בצביעה חוקית של הגרף. גרף נקרא k-צביע אם $\chi(G) \le k$.		$\chi(G) \le k$
	משפטי צביעה: • $\chi(K_n) = n$ • $\chi(G) = 2$ **אם ורק אם** G הוא גרף **דו-צדדי** המכיל לפחות קשת אחת. • אם G מעגל אז: **א.** אם זוגי $\|V(G)\| \bmod 2 = 0$ אז $\chi(G) = 2$ **ב.** אם אי זוגי $\|V(G)\| \bmod 2 = 1$ אז $\chi(G) = 3$		בשרטוט ניתן לראות את K_4 כך שכל הצמתים שכנים ולכן, $\chi(K_4) = 4$
6.2	נסמן ב-$\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית של צומת בגרף G. ברור שכל גרף G ניתן לצביעה נאותה ב-$\Delta(G) + 1$ צבעים. **משפט ברוקס**: $\chi(G) \le \Delta(G)$ פרט לשני מקרים בהם מתקיים $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ והם: • ל-G יש רכיב קשירות המשרה גרף מלא **(קליק)** על $\Delta(G) + 1$ צמתים. • $\Delta(G) = 2$ ויש ל-G רכיב קשירות המשרה מעגל באורך אי-זוגי.		
6.3	**משפט ארבעת הצבעים:** כל גרף מישורי הוא 4-צביע.		$\chi(G) \le 4$
6.4	**משפט חמשת הצבעים:** כל גרף מישורי הוא 5-צביע.		$\chi(G) \le 5$