נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,\dots,100\}$. נגדיר

$B=\mathcal{P}(\{A\})\setminus\{\emptyset,A\}$ כמו כן, נגדיר יחסים R,S על B באופן הבא:

לכל $X,Y\in B$, XRY אם ורק אם יש $f:X\to Y$ חח"ע ויש $g:X\to Y$ על.

לכל $X,Y\in B$, XSY אם ורק אם יש $f:X\to Y$ חח"ע **ואין** $g:X\to Y$ על.

א. הראו ש-R הוא יחס שקילות על B.

ב. מצאו את **מספר** מחלקות השקילות של R.

ג. הוכיחו ש-S הוא יחס סדר חלקי.

ד. מצאו את **מספר** האיברים **המינימליים** בקבוצה הסדורה חלקית $\langle B,S\rangle$.

ה. קבעו האם S הוא יחס סדר מלא על B.

נוכיח ש-R יחס שקילות:

רפלקסיביות: נניח $X\in B$ אז מתקיים:

$$f:X\to X \mid \text{חח"ע}$$

$$g:X\to X \mid \text{על}$$

נקבל אפוא כי קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל מ-X על X, נקבל

בייקציה ובפרט מתקיים ש-$|X|=|X|$

וזה נכון תמיד, אי לכך על-פי הגדרת R,

XRX, אז היחס R רפלקסיבי.

סימטריות: נניח XRY כך ש-$X,Y\in B$ אז מתקיים משיקול בייקציה:

$$|X|=|Y|$$

אז מתכונות שוויון מתקיים:

$$|Y|=|X|$$

אי לכך לפי הגדרת R, XRY, אז היחס R סימטרי.

טרנזיטיביות: נניח XRY,YRZ כך ש-$X,Y,Z\in A$:

$$\begin{cases}XRY\Rightarrow & |X|=|Y|\\ YRZ\Rightarrow & |Y|=|Z|\end{cases}$$

$$\Rightarrow |X|=|Z|\Rightarrow XRZ$$

קיבלנו אפוא כי היחס R הוא יחס שקילות. ■

נמצא את מחלקות השקילות: מהנתון נקבל:

כל קבוצה X מ-B כך שניתן לבצע בייקציה כלומר, שקול לעוצמה-לגודל הקבוצה מהתחום לגודל הקבוצה מהטווח שיהיו שווים בעוצמתם. נשים לב שהקבוצה הריקה והקבוצה A אינן נכללות כלומר נקבל בפרט שאפשר להרכיב קבוצות מהגודל $1\le|X|\le 99$.

יש 99 אפשרויות כך שהגודל של התחום והטווח יהיו שווים, אי לכך מספר המחלקות של R הינו:

$$|\Pi|=99$$

■

נוכיח ש-S יחס סדר חלקי:

במצב בו קיים פונקציה חח"ע ואין על מהנתונים מתקיים:

$$|X|<|Y|$$

אי-רפלקסיביות: נניח בשלילה שקיים $X\in B$ כך ש-XSX ונקבל

$|X|<|X|$ וזו סתירה, אז היחס S אנטי-רפלקסיבי.

טרנזיטיביות: יהי $X,Y,Z\in B$ וניח XSY וגם YSZ

אז מתקיים:

$$\begin{cases}XSY\Rightarrow & |X|<|Y|\\ YSZ\Rightarrow & |Y|<|Z|\end{cases}\Rightarrow |X|<|Z|\Rightarrow XSZ$$

, אז היחס S טרנזיטיבי.

קיבלנו אפוא כי היחס S הוא יחס סדר חלקי (סדר חזק). ■

נוכיח שהיחס אינו יחס סדר מלא:

נבחר שתי קבוצות זרות שעוצמתן זהה, תהיינה $X=\{1\},Y=\{2\}$

$X,Y\in B$ ומתקיים $|X|<|Y|$

וזו סתירה להגדרת היחס ולכן $X\$Y$ ובפרט $Y\$X$ אי לכך:

$$X=\{1\}\in B,Y=\{2\}\in B$$

אינם ניתנים להשוואה על-ידי היחס ולכן היחס **אינו** מלא. ■

מספר איברים מינימליים:

נמצא את האיבר $\Gamma\in A$ ונבדוק האם קיים $X\in A$ כך ש:

$$X S\Gamma\Rightarrow |X|<|\Gamma|$$

אז האיברים המינימליים הם כל תת קבוצה $X\subseteq A\mid |X|=1$, כלומר מספר האיברים המינליים הינו:

$$100$$

■

2023א' מועד ב' 97

בשני סעיפי השאלה נתייחס לפיזורים של 4 כדורים לבנים ו-4 כדורים שחורים ב-5 תאים שונים. כדורים מאותו צבע הם זהים. מפזרים את כל 8 הכדורים. אין חשיבות לסדר הכדורים באותו תא.

א. מצאו את מספר הפיזורים שבהם שום תא לא מכיל 4 כדורים מאותו צבע.

ב. מצאו את מספר הפיזורים שבהן אף תא לא נשאר ריק.

א. **<u>שלב ראשון – קביעת ה-U</u>**:

נחשב באמצעות המשלים ל-

$$|U| = D(5,4) \cdot D(5,4) = \binom{8}{4}^2 = 4900$$

על-ידי הכלה והפרדה.

<u>שלב שני – התכונות (תתי קבוצות)</u>:

A_i – לכל $1 \le i \le 2$ כאשר יש בתא 4 כדורים מאותו צבע לבן או שחור בהתאמה.

<u>שלב שלישי – חישוב התכונות</u>:

נרצה לחשב 2 בחר 1 שזה שווה ל-2

עבור A_i לכל $1 \le i \le 2$ מתקיים:

נבחר תא אחד מתוך 5 אפשרויות ונשים בו 4 כדורים מצבע זהה ו הצבע האחר יהיו 4 כדורים זהים בתוך 5 תאים שונים כי אין לו שום מגבלה.

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{4} \cdot D(5,4) = \binom{5}{1}\binom{4}{4} \cdot \binom{8}{4} = 350$$

נרצה לחשב 2 בחר 2 שזה שווה ל-1.

עבור $A_1 \cap A_2$ מתקיים:

נבחר תא אחד מתוך 5 אפשרויות ונשים בו 4 כדורים מצבע זהה ואז נבחר תא אחד מתוך 5 אפשרויות ונשים בו 4 כדורים מצבע השני.

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{4} = 25$$

שלב רביעי – הצבה במשלים:

ונקבל את המבוקש:

$$\boxed{4900 - 2 \cdot (350) + 25 = 4225}$$

ב. **<u>שלב ראשון – קביעת ה-U</u>**:

נחשב באמצעות המשלים ל-

$$|U| = D(5,4) \cdot D(5,4) = \binom{8}{4}^2 = 4900$$

על-ידי הכלה והפרדה.

<u>שלב שני – התכונות (תתי קבוצות)</u>:

A_i – לכל $1 \le i \le 5$ כאשר האינדקס מסמל תא ריק.

<u>שלב שלישי – חישוב התכונות</u>:

נרצה לחשב 5 בחר 1 שזה שווה ל-5

עבור A_i לכל $1 \le i \le 5$ מתקיים:

נבחר את מספר הדרכים לפזר 4 כדורים לבנים זהים בתוך 4 תאים ואותו דבר עבור כדורים שחורים זהים.

$$D(4,4) \cdot D(4,4) = \binom{7}{4}^2 = 1225$$

נרצה לחשב 5 בחר 2 שזה שווה ל-10.

עבור $A_i \cap A_j$ לכל $1 \le i,j \le 5, i \ne j$ מתקיים:

נבחר את מספר הדרכים לפזר 4 כדורים לבנים זהים בתוך 3 תאים ואותו דבר עבור כדורים שחורים זהים.

$$D(3,4) \cdot D(3,4) = \binom{6}{4}^2 = 225$$

נרצה לחשב 5 בחר 3 שזה שווה ל-10.

עבור $A_i \cap A_j \cap A_k$ לכל $1 \le i,j,k \le 5, i \ne j, i \ne k, j \ne k$ מתקיים:

נבחר את מספר הדרכים לפזר 4 כדורים לבנים זהים בתוך 2 תאים ואותו דבר עבור כדורים שחורים זהים.

$$D(2,4) \cdot D(2,4) = \binom{5}{4}^2 = 25$$

נרצה לחשב 5 בחר 4 ששווה ל=5.

עבור $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l$ לכל $1 \le i,j,k,l \le 5$ כך שכל האינדקסים שונים אחד מהשני ומתקיים:

נבחר את מספר הדרכים לפזר 4 כדורים לבנים זהים בתוך תא אחד ואותו דבר עבור כדורים שחורים זהים.

$$D(1,4) \cdot D(1,4) = \binom{4}{4}^2 = 1$$

עבור $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ החיתוך ריק כי כל הקבוצות זרות.

שלב רביעי – הצבה במשלים:

ונקבל את המבוקש:

$$\boxed{4900 - 5 \cdot (1225) + 10 \cdot (225) - 10 \cdot (25) + 5 \cdot (1) = 780}$$

2020ג' מועד א' 85

א. מצאו את מספר המספרים בעלי 5 ספרות שבהם מכפלת הספרות היא 180 (למשל 19451 ו-22335 הם מספרים כאלה) נמקו את התשובה.

ב. נתונה קבוצה A כך ש-$|A| = 10$. מצאו את מספר הקבוצות מהצורה $\{B, C\}$ כאשר $B, C \subseteq A$, $|B| = 5$ ו-$|B \cap C| = 1$.

א. נבצע **פירוק לגורמים** למספר $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, מכאן נסיק כי הספרות שיכולות להופיע הן 2,3,4,5,6,9 ובפרט את הספרה 1 כלומר הספרות שמותרות לשימוש הן: 1,2,3,4,5,6,9.

נבדוק אילו אפשרויות של 5 מספרים כך שמכפלתם שווה ל-180 וגם שמספר הפעמים של מופע של כל ספרה שונה מכל אפשרות אחרת.

- אפשרות 1: $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9$
- אפשרות 2: $1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6$
- אפשרות 3: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9$
- אפשרות 4: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$
- אפשרות 5: $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
- אפשרות 6: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

ישנן 6 אפשרויות כך שנחשב את מספר הסידורים שונים בשורה לספרות אלו יש לכל אפשרות, **נדגיש כי מספר אפס לא יופיע כספרה כלשהי**, אז אין לנו בעיה עם הספרה השמאלית ביותר ומעקרון החיבור נקבל את המבוקש:

$$\boxed{\frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{2!} + 5! + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 360}$$

ב. **דרך ראשונה**:

מהנתון נסיק כי מספר האפשרויות של קבוצה B היא: $\binom{10}{5} = 252$ על מנת לקיים שהחיתוך יהיה שווה לאחד, נבחר איבר אחד מקבוצה B שיהיה גם ב-C: $\binom{5}{1}$ ואז נותרו 5 איברים ב-$A \setminus B$ לכל איבר שכזה ישנן שתי אפשרויות:

- האיבר נמצא ב-C.
- האיבר לא נמצא ב-C.

לכן לכל איבר כזה יש שתי אפשרויות ונקבל: $2^5 = 32$.

המקרים בהם $|C| = 5$ נספרו פעמיים, אי לכך נרצה להחסיר בהתאמה, לכן נבחר 5 איברים מתוך 10 ל-B ולחיתוך נבחר איבר אחד מתוך 5 איברים כאשר $B \cap C$ ונבחר 4 איברים מתוך 5 מגודל 4 כאשר $C \setminus (B \cap C)$ ובגלל שמדובר בקבוצה, אז לכל זוג כאשר $|C| = 5$ של $\{B, C\}$ קיים אצלנו גם זוג $\{C, B\}$ לכן נחלק את הכל ב-2. $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = 3150$

נקבל אפוא את המבוקש:

$$\boxed{252 \cdot 5 \cdot 32 - 3150 = 37170}$$

דרך שנייה:

I. נבחר את B. $\binom{10}{5}$

II. נבחר את $B \cap C$. $\binom{5}{1}$

III. מתוך $A \setminus B$ נבחר איברים ל-C. 2^5

(א) אז נספרו פעמיים הקבוצות כאשר $|C| = 5$ לדוגמה:

$$\left\{\overbrace{\{1,2,3,4,5\}}^{I}, \left\{\overbrace{5}^{II}, \overbrace{6,7,8,9}^{III}\right\}\right\} \quad \left\{\overbrace{\{5,6,7,8,9\}}^{I}, \left\{\overbrace{5}^{II}, \overbrace{1,2,3,4}^{III}\right\}\right\}$$

אי לכך התשובה הינה:

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1}\left(\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\binom{5}{4}}^{(א)} + \binom{5}{5}\right) =$$

$$= 37170$$

2023ב' מועד א' 85

נסמן ב-a_n את מספר המילים באורך n, שכתובות באותיות A, B, C, D, E ושבהן מימין לכל אות A וגם מימין לכל אות B חייבת להופיע אחת מהאותיות C או D. a_0 מוגדר כ-1.

למשל: $C, D, E, AC, BC, BDCAC$ הן מילים חוקיות,

אבל $A, B, AEC, ABC, BDAA$ לא חוקיות.

א. מצאו בעזרת חישוב ישיר את a_1, a_2.

ב. מצאו יחס נסיגה ל-a_n ובדקו שהערכים של a_0, a_1, a_2 מתאימים ליחס הנסיגה.

ג. פתרו את יחס הנסיגה וקבלו נוסחה מפורשת ל-a_n.

מציאת נוסחת נסיגה

שלב ראשון – מקרים בסיסיים:

מילים באורך אפס.	$a_0 = 1$
מחרוזת מילים באורך 1: יש 3 אפשרויות C או D או E.	$a_1 = \binom{3}{1} = 3$
מחרוזת מילים באורך 2: או שהמחרוזת התחילה ב-$\sigma \in \{C, D, E\}$ ולכן יש 3 אפשרויות מימין. או שהמחרוזת התחילה ב-$\sigma \in \{A, B\}$ ולכן יש 2 אפשרויות מימין.	$a_2 = \left[3 \cdot \overbrace{x}^{\#3} + \overbrace{2}^{\#2}\right]$ $= 3 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{2}{1} = 13$

שלב שני – צעד רקורסיבי:

i. אם הסדרה מתחילה בשמאל בתו $\sigma \in \{C, D, E\}$ מימין ל-σ אין מגבלה ולכן כל סדרה חוקית באורך $n-1$ יכולה להופיע ויש $3 \cdot a_{n-1}$ סדרות כאלה.

σ _ _ _ _ _ _ _ _ …

ii. אם הסדרה מתחילה בתו $\sigma \in \{A, B\}$ מימינו חייב להופיע התו C או D ואז נותרו $n-2$ מקומות מימין בהם יכולה להופיע כל סדרה חוקית באורך $n-2$ ויש $2 \cdot a_{n-2}$ סדרות כאלה

σ C or D _ _ _ _ _ _ _ …

נקבל אפוא את נוסחת הנסיגה המבוקשת:

לכל $n \geq 2$ טבעי: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$

בדיקת נכונות הנוסחה

$$n = 2 \mid a_2 = 3 \cdot a_1 + 4 \cdot a_0 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$$

מציאת נוסחה מפורשת

פתרון לכל $n \geq 2$ טבעי: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$, המשוואה האופיינית:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -1$$

הפתרון הוא מהצורה:

$$a_n = A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$a_0 = 1 \mid n = 0 \Rightarrow 1 = A + B$$

$$a_1 = 3 \mid n = 1 \Rightarrow 3 = A \cdot 4 + B \cdot (-1)$$

$$3A + 3B = 4A - B \Rightarrow A = 4B$$

$$\Rightarrow 1 = 4B + B \Rightarrow B = \frac{1}{5} \Rightarrow A = \frac{4}{5}$$

נקבל אפוא את הפתרון המבוקש:

לכל n טבעי: $a_n = \frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{1}{5} \cdot (-1)^n =$

$$a_n = \frac{1}{5}(4^{n+1} - (-1)^{n+1})$$

כלומר קיים b כך שלכל a מתקיים $f(a)=b$ וזה נכון בפרט.

2024א' מועד ב' 94

נתונים פסוקים α,β. נתון שהפסוק $\alpha\to\beta$ גורר טאוטולוגית את $\neg(\alpha\to\beta)$ אזי:

[1] מהנתון נובע כי α הוא טאוטולוגיה.

[2] מהנתון נובע כי β הוא טאוטולוגיה.

[3] הנתון סותר את עצמו: לא ייתכן ש-$\alpha\to\beta$ יגרור טאוטולוגית את $\neg(\alpha\to\beta)$.

[4] אף אחת מהטענות [1] – [3] אינה נכונה.

נעלה ללח אמת נתחיל בלוח האמת של הפסוק הנתון ונעשה **סקירה**.

α	β	$\alpha\to\beta$	$\neg(\alpha\to\beta)$
T	T	T	F
T	F	**F**	**T**
F	T	T	F
F	F	T	F

לכן התשובה הנכונה היא **[1]**, נשים לב כי מהנתון שהפסוק $\alpha\to\beta$ גורר טאוטולוגית את $\neg(\alpha\to\beta)$, אזי שרק השורה השנייה מתקיימת ובפרט α הוא טאוטולוגיה.

2024ב' מועד א' 85

נתון ש-A,B,C קבוצות. נתייחס לפסוק: (*) $A\setminus B\subseteq C$.

נניח כי ההקשר הוא קבוצה ש-A,B,C וכל איבריהן שייכים אליה.

להלן מדובר על **שקילות** בין פסוקים במובן הבא: פסוק נתון הוא **שקול** לפסוק אחר אם יש להם אותו ערך אמת.

[1] מהנתונים נובע כי (*) שקול ל-$\forall x(x\in A\vee x\notin B)\to\forall x(X\in C)$

[2] מהנתונים נובע כי (*) שקול ל-$\forall x(x\in A\wedge x\notin B)\to\forall x(X\in C)$

[3] מהנתונים נובע כי (*) שקול ל-$\forall x([\neg(x\in A\to x\in B)]\to x\in C)$

[4] אף אחת מהטענות [1] – [4] אינה נכונה.

שלב ראשון – משפט פורמאלי לוגי:

מתקיים: $A\setminus B\subseteq C$

שלב שני – הצרנה ושימוש בשקילויות טאוטולוגיות:

$$\forall x(x\in A\wedge x\notin B)\to(X\in C)$$

מתקיים:

$$\forall x([\neg(x\in A\to x\in B)]\to x\in C)\equiv$$
$$\equiv^{p\wedge q\equiv\neg(p\to\neg q)}\ \forall x(x\in A\wedge x\notin B)\to(X\in C)$$

2023א' מועד א' 86

מספר העצים המתויגים על $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ שבהם כל העלים הם 1,2,3,4 ולצמתים 5,6 יש אותה דרגה הוא:

[1] 30.

[2] 50.

[3] 20.

[4] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

ידוע כי סדרת פרופר מאורך $7-2=5$, אי לכך סדרת פרופר באורך 5. מהנתון נסיק כי הצמתים תגים שמופיעים x פעמים בסדרה, הדרגה שלהם היא $x+1$. מהנתון ישנם 4 עלים כלומר נשאר 3 צמתים (5,6,7) שאינם עלים שמופיעים בסדרת פרופר, ונרצה שהדרגה של 5,6 תהיינה זהות. נראה את האפשרויות השונות ונדגיש כי 3 הצמתים שאינם עלים דרגתם היא לפחות 2:

deg(5)	deg(6)	deg(7)
2	2	4
3	3	2

כלומר ישנן 2 אפשרויות:

תג 5 ותג 6 מופיעים כל אחד פעם אחת בסדרה ושאר 3 המקומות תג 7 מופיע. $\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{3}=20$.

תג 5 ותג 6 מופיעים כל אחד פעמיים בסדרה ויישאר לתג 7 להופיע פעם אחת. $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}=30$.

ומעקרון החיבור נקבל את המבוקש:

$$20+30=50$$

2023א' מועד א' 87

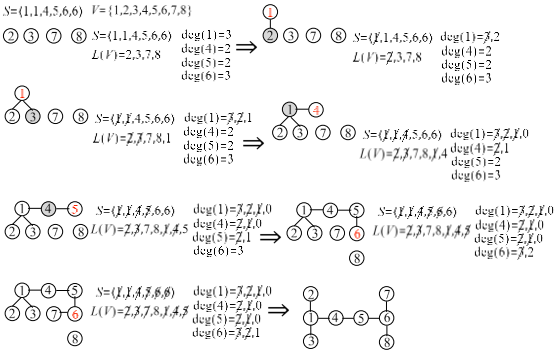
נתון עץ מתויג T שצמתיו $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ו-$(1,1,4,5,6,6)$ סדרת פרופר שלו. הגרף G התקבל מ-T על-ידי הוספת הקשתות $\{2,7\}$ ו-$\{3,8\}$ בלבד.

[1] G הוא גרף אוילרי.

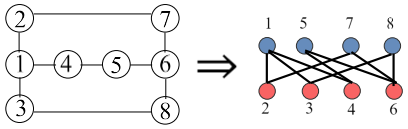
[2] G הוא גרף דו-צדדי.

[3] אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

נבנה עץ מתויג מסדרת פרופר:



נוסיף את הקשתות המבוקשות ונקבל את הגרף:



נשים לב כי $\deg(1)=\deg(6)=3$ הם מדרגה אי-זוגית אי לכך בפרט הגרף אינו אוילרי ומאידך ניתן לחלק לקבוצות:

$$A=\{1,5,7,8\},B=\{2,3,4,6\}$$

אי לכך הגרף דו-צדדי, כלומר התשובה הנכונה היא [2].

2022א' מועד ב' 96

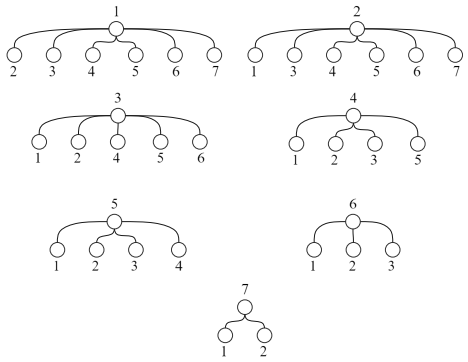
נתון $G=(V,E)$ **גרף פשוט** שבו $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ו-$E=\{\{x,y\}\mid x,y\in V,x+y\leq 9\}$.

א. מצאו את דרגות כל הצמתים בגרף G והוכיחו שיש בו מסלול אוילר שאינו מעגל.

ב. הוכיחו בעזרת משפט קורטובסקי ש-G אינו מישורי.

ג. הוכיחו ש-G אינו מקיים את משפט אור (משפט 3.2) אך יש בו מעגל הימלטון.

א. נשרטט בהתאם:



אי לכך נקבל:

$$\deg(1)=\deg(2)=6,\deg(3)=5,\deg(4)=\deg(5)=4$$
$$\deg(6)=3,\deg(7)=2$$

נשים לב כי בין כל שני צמתים בגרף יש מסלול, אי לכך הגרף קשיר וקיבלנו אפוא כי הדרגה של צומת עם התג 3 והצומת עם התג 6 דרגתם היא אי-זוגית וכל שאר הצמתים עם דרגה זוגית, אי לכך הגרף מכיל מסלול אוילר שאיננו מעגל. ■

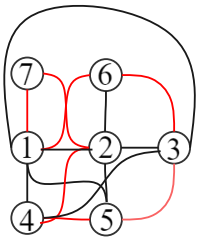
ב. נניח בשלילה שהגרף מישורי, מאידך מתקיים הצמתים עם התגים 1,2,3,4,5 הם סך-הכל 5 צמתים מדרגה הגבוהה או שווה ל-4 כך שהם שכנים אחד של השני ולכן הגרף מכיל העדנה של K_5 וזו סתירה למשפט קורטובסקי. לכן הגרף אינו מישורי. ■

ג. מתקיים $|V|=7\geq 3$ ונבחר את זוג הצמתים עם התג 6 ועם התג 7 שאינם שכנים ומתקיים:

$$\deg(6)+\deg(7)=5\geq 7$$

וזו סתירה לכן G אינו מקיים את משפט אור. ■

נשרטט בהתאמה:



מסלול למעגל המילטון הינו:

$$P=35,54,42,27,71,16,63$$

2022ב' מועד א' 88

נתונה קבוצה **אינסופית** A של מספרים **ממשיים** כך ש-$A\cap\mathbf{Q}=\emptyset$. אז:

[1] $|A|>\aleph_0$.

[2] $|A|\leq\aleph_0$.

[3] קיים קטע פתוח (a,b) (כאשר a,b מספרים ממשיים) כך ש-$A\cap(a,b)$ קבוצה אינסופית.

[4] כל הטענות הקודמות שגויות.

[1] הטענה לא נכונה, נבחר את הקבוצה $A=\{n\cdot e\mid n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\}$ מתקיים שהחיתוך היא קבוצה ריקה, אבל A בת-מנייה מכך שניתן להראות **בייקציה** מהטבעיים (ללא אפס) על A כך ש:

$$f:\mathbf{N}\setminus\{0\}\to A\mid\forall n\in\mathbf{N}\setminus\{0\},f(n)=n\cdot e$$

(שאלה 13: אם A היא קבוצה בת-מנייה ו-B היא קבוצה כלשהי, אז $A\setminus B$ היא בת-מנייה).

[2] הטענה לא נכונה, נבחר את הקבוצה $A=\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ מתקיים שהחיתוך היא קבוצה ריקה, אבל A אינה בת-מנייה.

[3] הטענה לא נכונה, נבחר את הקבוצה $A=\{n\cdot e\mid n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}\}$ כמו ב-[1], מתקיים שהחיתוך היא קבוצה ריקה, אבל לכל קטע פתוח שכזה העוצמה $|A\cap(a,b)|$ היא סופית, נוכיח זאת:

יהי $a,b\in\mathbf{R}$

אם $a,b\leq 0$, אז $A\cap(a,b)=\emptyset$.

אם $a,b>0$ מתכונת ארכימדס: לכל מספר ממשי קיים מספר טבעי גדול ממנו. נבחר את המספר הטבעי הקטן ביותר n כך ש:

$$n\cdot e>a\Rightarrow(n-1)\cdot e<a$$

באופן דומה נבחר את המספר הטבעי הגדול ביותר m כך ש:

$$m\cdot e<b\Rightarrow(m+1)\cdot e>b$$

אי לכך מהכפולות של e שנמצאות בקטע (a,b) הן אלו המתאימות למספרים הטבעיים n עד m, כלומר: $n\cdot e,(n+1)\cdot e,\dots,m\cdot e$.

מכך ש-n-ו-m סופיים, אז יש מספר סופי של כפולות כאלו.

נקבל אפוא כי העוצמה $|A\cap(a,b)|$ היא סופית.

[4] הטענה נכונה.