סיכום הקורס במודלים חישוביים

קורס 20604 · עודכן ב-2026א׳

(נכתב על ידי דניאל וונג – www.wongi.io)

כל סוג שאלה בקורס, ולכל סוג – הצעדים שפותרים אותו, דוגמה פתורה, מה חשוב לא לשכוח, והמבחנים שבהם הופיע. מספרי המשפטים וההגדרות לפי ספר הקורס. אותם נושאים, בקצרה, בדף הנוסחאות למבחן.

תוכן העניינים

נושא	עמוד	נושא	עמוד
שפות רגולריות	1	סיבוכיות	10
שפות חסרות-הקשר	5	טענות נפוצות – הוכיחו או הפריכו	11
חישוביות	8		

ביבליוגרפיה

טסה, ת׳, ונוטוב, ז׳. *מודלים חישוביים – מדריך למידה* (20604). רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.

Sipser, M. (2013). *Introduction to the Theory of Computation* (3rd ed.). Cengage Learning.

1 שפות רגולריות

1.1 סימונים והגדרות

Σ – אלפבית; Σ^* – כל המילים; ε – המילה הריקה; $\emptyset \neq \{\varepsilon\}$; $|w|$ – אורך; $\#_a(w)$ – מספר ה-a-ים; w^R – היפוך; L; $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$; $\langle M \rangle$ – קידוד.

מודל	הגדרה
DFA (1.5)	$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ – **מעבר אחד בדיוק** לכל מצב ואות
NFA (1.37)	$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathrm{P}(Q)$ – אפשר כמה מעברים, אף מעבר, ומעברי ε
GNFA (1.64)	על כל קשת ביטוי רגולרי; התחלה בלי קשתות נכנסות, מקבל יחיד בלי יוצאות

רגולרית $\iff$ יש DFA $\iff$ יש NFA (1.39) $\iff$ יש ביטוי רגולרי (1.54). כל שפה **סופית** רגולרית.

שימו לב: מסמנים את מצב ההתחלה (חץ נכנס) ואת המצבים המקבלים (עיגול כפול). ב-DFA – כל מצב עם מעבר לכל אות.

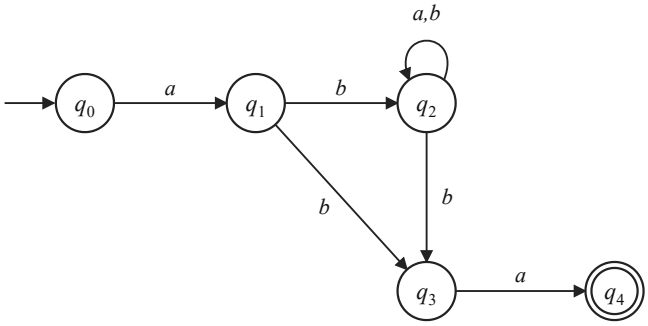
1.2 בניית אוטומט סופי לשפה מתוארת

1. **מה צריך לזכור?** שארית (מודולו), האותיות האחרונות, כמה מתבנית כבר נקראה, מונה שנעצר ("לכל היותר 2").
2. **מצב לכל דבר שזוכרים**, ומעברים אות אחר אות.
3. **מקבלים** – והבדיקה: 3 מילים בשפה ו-3 מחוצה לה, כולל ε והקצרה ביותר.
4. **NFA** כשנוח לנחש ("מכאן מתחיל הסוף"); **מכפלה** $Q_1 \times Q_2$ ל-$\cap, \cup, \setminus$.

שימו לב: חפיפה: התחלה וסוף (או שתי תבניות) יכולים לחלוק אותיות – מוסיפים מעבר לחפיפה. **"מסתיימת ב-" $\neq$ "מכילה"**: בודקים מילה שמכילה את התבנית ומסתיימת אחרת (ב-DFA ל"מסתיימת" אין מצב בור).

דוגמה: מילים מעל $\{a, b\}$ **שמתחילות ב-**ab **ומסתיימות ב-**ba

החפיפה: ה-b של ab הוא גם ה-b של ba, ולכן aba בשפה. מכאן המעבר $q_1 \xrightarrow{b} q_3$:



במבחנים: 2026א מועד 82 שאלה 1א (חפיפה $aabc$); 2025א מועד 64 שאלה 1א (111 בדיוק פעם אחת – 7 מצבים); 2026א מועד 88 שאלה 1א ("מסתיימת" – בלי מצב בור).

1.3 כתיבת ביטוי רגולרי

1. **מפרקים למקרים** (מה מופיע ראשון? אילו חפיפות?) ולבלוקים (אורך זוגי = $(\Sigma\Sigma)^*$).
2. **ביטוי לכל מקרה**, מאחדים ב-$\cup$; "מכילה" = $\Sigma^* x \Sigma^*$.
3. **בודקים** את ε, את המילים הקצרות, ואת "לכל היותר k" (כולל 0).
4. שפה קשה ("לא מכילה", זוגיות) – קודם DFA, ואז R3.

"מכילה גם x וגם y": $\Sigma^* x \Sigma^* y \cup y \Sigma^* x \Sigma^* \left(\text{החפיפות}\right)\Sigma^*$.

זהויות: $R \cup \emptyset = R$, $R\varepsilon = R$, $R\emptyset = \emptyset$, $\emptyset^* = \varepsilon$, $(R^*)^* = R^*$. **הפרכת זהות:** R, S קונקרטיים ומילה אחת שבצד אחד בלבד (למשל $R = a, S = b$: $abab \in (ab)^*$ אבל $\notin a^*b^*$).

דוגמה 1: מכילות aa וגם bb – אין חפיפה

$$\Sigma^*(aa\Sigma^*bb \cup bb\Sigma^*aa)\Sigma^*$$

דוגמה 2: מכילות ab וגם ba – יש חפיפה (aba, bab)

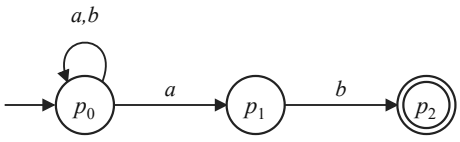
$$\Sigma^*(aba \cup bab \cup ab\Sigma^*ba \cup ba\Sigma^*ab)\Sigma^*$$

במבחנים: 2026א מועד 82 שאלה 1ב (sts וגם tst – החפיפות $ststs$, $tsts$); 2025א מועד 64 שאלה 1ב ("לכל היותר" כולל אפס).

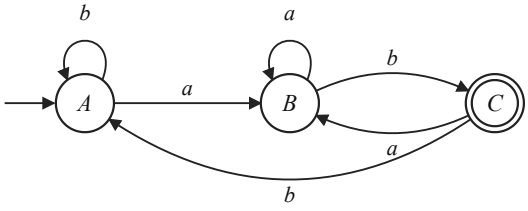
1.4 המרת NFA ל-DFA (שיטת תת-הקבוצות, משפט 1.39)

1. $R = E(R)$ וכל מה שמגיעים אליו במעברי ε.
2. **התחלה:** $E(\{q_0\})$.
3. **לכל תת-קבוצה חדשה ולכל אות a:** $E\left(\bigcup_{r\in R}\delta(r,a)\right)$ (קבוצה ריקה – מצב בור).
4. **מקבלים:** כל תת-קבוצה שיש בה מצב מקבל. רושמים רק את תת-הקבוצות שמגיעים אליהן.

דוגמה: NFA ל"מסתיימת ב-ab" וה-DFA שמתקבל ממנו



התחלה $\{p_0\}$; $\{p_0\} \xrightarrow{a} \{p_0,p_1\}$; $\{p_0\} \xrightarrow{b} \{p_0\}$, $\{p_0,p_1\} \xrightarrow{a} \{p_0,p_1\}$; $\{p_0\} \xrightarrow{b} \{p_0\}$, $\{p_0,p_2\} \xrightarrow{a} \{p_0,p_1\}$; $\{p_0,p_1\} \xrightarrow{b} \{p_0,p_2\}$, $\{p_0,p_2\} \xrightarrow{b} \{p_0\}$. מקבל: $\{p_0,p_2\}$.



($A = \{p_0\}$, $B = \{p_0,p_1\}$, $C = \{p_0,p_2\}$)

במבחנים: 2025א מועד 92 שאלה 1א.

1.5 מביטוי רגולרי ל-NFA (למה 1.55)

a: שני מצבים וקשת a. ε: מצב מקבל יחיד. $\emptyset$: מצב לא מקבל. $R_1 \cup R_2$: התחלה חדשה עם ε לשתיהן. R_1R_2: ε מכל מקבל של R_1 להתחלה של R_2. R^*: התחלה חדשה **מקבלת** + ε מכל מקבל חזרה להתחלה של R.

1.6 מ-DFA לביטוי רגולרי (GNFA, למה 1.60)

1. **מצב התחלה חדש** $s \xrightarrow{\varepsilon} q_0$; **מקבל חדש** $f \xrightarrow{\varepsilon} a : a$ מכל מקבל ישן.
2. **מקבצים** קשתות מקבילות לקשת אחת: $R_1 \cup R_2$ (גם לולאות).
3. **מסלקים מצבים בסדר שהשאלה נותנת.** לכל זוג i,j דרך המצב המסולק r: $R(i,j) \leftarrow R(i,r)\,R(r,r)^*\,R(r,j) \cup R(i,j)$
4. **מציירים את ה-GNFA אחרי כל סילוק** (שואלים על השלבים!). בסוף: הביטוי על $s \to a$.

שימו לב: קשת אחת לכל זוג מצבים: לולאה חדשה מתאחדת עם הלולאה הקיימת **לפני** הסילוק הבא. $\emptyset$ – אין קשת; ε לא נעלם מאיחוד.

דוגמה: "מסתיימת ב-ab" (ה-DFA מ-R5), סילוק A, אחר כך B, אחר כך C

סילוק A (לולאה b): $s \to B$: b^*a; $C \to B$: $a \cup bb^*a$. סילוק B (לולאה a): $s \to C$: b^*aa^*b; $C \to C$: $(a \cup bb^*a)a^*b$. סילוק C:

$$b^*aa^*b((a \cup bb^*a)a^*b)^*$$

במבחנים: 2025א מועד 64 שאלה 4א; 2025ב מועד 50 שאלה 1ב; 2025א מועד 92 שאלה 4א; 2024ב מועד 65 שאלה 1ג.

1.7 מספר מצבים מינימלי (מייהיל-נרוד, בעיה 1.52)

חסם תחתון: קבוצת מילים שכל שתיים בה **ניתנות להבחנה** – יש סיפא z ש-$xz \in L$ ו-$yz \notin L$. k מילים כאלה $\Rightarrow$ לפחות k מצבים.
אינסוף כאלה $\Rightarrow L$ אינה רגולרית.

זוג	סיפא z	בשפה	לא בשפה
x, y	z	xz	yz

כדי להוכיח שה-DFA מינימלי: טבלה כזו לכל זוג מצבים (מילה אחת שמגיעה לכל מצב). **מינימיזציה** (שיטה חיצונית, מילוי טבלה): מסמנים זוגות (מקבל, לא מקבל); חוזרים: (p,q) מסומן אם אות מעבירה אותם לזוג מסומן; זוגות לא מסומנים – מתאחדים.

במבחנים: 2026א מועד 88 שאלה 1א (7 מצבים); 2026א מועד 96 שאלה 1א (9 מצבים).

1.8 סגירות ו"הוכיחו או הפריכו"

פעולה	רגולריות סגורות?	איך
$\cup, \cdot, ^*$	כן (1.45–1.49)	NFA / ביטוי
$\cap, \setminus$	כן	מכפלה $Q_1 \times Q_2$
משלים	כן	DFA, מחליפים מקבלים
L^R	כן	הופכים קשתות, התחלה חדשה עם ε
שיזור (merge)	כן	מכפלה + ביט תור, התחלה נפרדת
רישות $Pref(L)$	כן	מקבל = כל מצב שממנו מגיעים ל-F
$\frac{1}{2}$-L (בעיה 1.57)	כן	מריצים את M על x, ובמקביל מנחשים y מהסוף אחורה (זוג מצבים)
$h(L)$, $h^{-1}(L)$	כן	מחליפים כל אות בביטוי ב-$h(a)$; DFA שעל a קורא את $h(a)$

"הוכיחו או הפריכו": כן $\Rightarrow$ בנייה (ה-tuple + שורת נימוק). לא $\Rightarrow$ **דוגמה נגדית** עם שפות מוכרות.

- L^* רגולרית $\not\Rightarrow L$ רגולרית ($L = \{0,1\} \cup \{0^n1^n\}$, $L^* = \Sigma^*$). גם AB רגולרית $\not\Rightarrow A$ רגולרית ($B = \Sigma^*$).
- **שינוי סופי:** L שונה מ-A במספר סופי של מילים $\Rightarrow L$ ו-A באותו מעמד ($L = A \triangle D$).
- לא-רגולריות **לא סגורות** לאיחוד: $a^*b^* = \{a^nb^n\} \cup \{a^ib^j : i \neq j\}$; **סגורות** למשלים.

במבחנים: 2025ב מועד 66 שאלה 1א–ב; 2025א מועד 64 שאלה 1ג; 2024ב מועד 94 שאלה 1א–ב; 2025ב מועד 94 שאלה 1ב (שיזור).

1.9 הוכחה שאינה רגולרית (למת הניפוח, משפט 1.70)

הלמה: אם L רגולרית, יש p כך שכל $s \in L$, $|s| \geq p$, היא xyz עם $|xy| \leq p$, $|y| > 0$, ו-$xy^iz \in L$ לכל $i \geq 0$.

1. נניח בשלילה ש-L רגולרית, p אורך הניפוח.
2. **בוחרים** $s \in L$, $|s| \geq p$, כך ש-$|xy| \leq p$ שם את y בגוש אחד ($y = 0^k : 0^p1^p$).
3. מראים i (לרוב 0 או 2) כך ש-$xy^iz \notin L$ – **לכל** חלוקה.
4. סתירה.

דרכים קצרות: $L \cap R$ (רגולרית) היא שפה לא רגולרית מוכרת; **אינסוף מילים שונות-זו-מזו** (R6). בוחרים s ו-i שנותנים **מקרה אחד** (למשל a^pba^p עם $i = 3$ שומר אורך אי-זוגי).

הקלאסיות: 0^n1^n (1.73), $\#_0 = \#_1$, ww, ($s = 0^p10^p1$), 1^{n^2}, $0^i1^j, i > j$ (מנפחים למטה).

במבחנים: 2024ב מועד 84 שאלה 1ב; 2024ב מועד 65 שאלה 1א; 2025ב מועד 66 שאלה 1ג (חיתוך עם 10^*10^*).

1.10 רגולרית או לא? בדיקה מהירה ומילים לניפוח

רגולרית אם מספיק זיכרון **סופי**: שארית ($n \equiv m \pmod k$), מונה חסום ("ההפרש בכל רישא ≤ 2"), תבנית באורך קבוע, שפה סופית. **לא רגולרית** אם צריך **לספור בלי חסם**: $n = m$, $n < m$, ww, ריבועים, ראשוניים.

שפה	s	i
0^n1^n, $\#_0 = \#_1$	0^p1^p	2
$0^i1^j,\ i > j$	$0^{p+1}1^p$	0
ww	0^p10^p1	2
אורך אי-זוגי, אמצעית b	a^pba^p	3
1^{n^2}	1^{p^2}	2

2 שפות חסרות-הקשר

2.1 בניית דקדוק חסר-הקשר (הגדרה 2.2)

1. **איחוד מקרים:** $S \to S_1 \mid S_2$. **כמויות שמתאימות** – מבחוץ פנימה ($A \to aAb$). **חלק חופשי:** $A \to aA \mid \varepsilon$.
2. **אי-שוויון** = חלק מותאם + עוד אות לפחות. **יחס קבוע** ($\#_0 = 2\#_1$) – S בין כל האותיות.
3. **נימוק בשני הכיוונים**, ו-$G = (V, \Sigma, R, S)$ פורמלית.

שפה	דקדוק
$a^n b^n$	$S \to aSb \mid \varepsilon$
$a^i b^j,\ i > j$	$S \to aS \mid aT,\ T \to aTb \mid \varepsilon$
פלינדרומים	$S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$
$\#_a = \#_b$	$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \varepsilon$
$w \neq w^R$	$S \to aSa \mid bSb \mid aXb \mid bXa,\ X \to aX \mid bX \mid \varepsilon$

שימו לב: בבקשה "PDA **ודקדוק**" – שניהם, ישירות (לא דרך המרה). דקדוק בשורה אחת קשה לקריאה – משתנה בשורה.

דוגמה: $a^i b^j$ **עם** $i \neq j$ – **איחוד של "יותר** a**" ו"יותר** b**"**

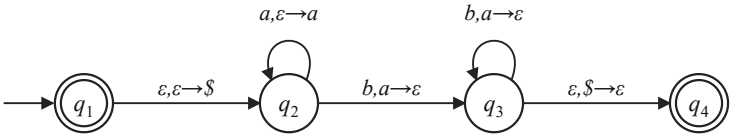
$$S \to U \mid V$$
$$U \to aU \mid aT$$
$$V \to Vb \mid Tb$$
$$T \to aTb \mid \varepsilon$$

במבחנים: 2026א מועד 82 שאלה 2ב ($|w| > |u|$); 2025א מועד 64 שאלה 2ג ($\#_0 = 2\#_1$); 2026א מועד 96 שאלה 2א ($\#_a = \#_b$).

2.2 בניית אוטומט מחסנית (הגדרה 2.13)

1. $\varepsilon, \varepsilon \to \$$ בהתחלה; $\varepsilon, \$ \to \varepsilon$ לפני הקבלה.
2. **סופרים:** דוחפים על כל אות, שולפים על כל אות שמשווים (שתיים – שולפים פעמיים).
3. **ניחוש:** מעבר ε ל"מכאן החצי השני" (פלינדרומים, $|w| < |u|$).
4. **קורא PDA:** מה הלולאה המנחשת יכולה לקרוא **גם** – "לפחות" ולא "בדיוק".

דוגמה: $a^n b^n$ **(איור 2.15)**



(2.21) CFG → PDA: $\$$ ו-S על המחסנית; בלולאה – משתנה בראש ⇐ מחליפים בכלל; טרמינל בראש ⇐ משווים לקלט.

במבחנים: 2025א מועד 64 שאלה 2ב ($m = \lfloor (k+n)/2 \rfloor$); 2025ב מועד 50 שאלה 2ג; 2026א מועד 96 שאלה 2ב.

2.3 CNF, גזירה ורב-משמעות

CNF (2.9): $A \to BC \mid a$ ו-$S_0 \to \varepsilon$, S_0 בלבד. 1. $S \to S_0$; 2. מסירים $A \to \varepsilon$ (מוסיפים גרסאות בלי A); 3. מסירים $A \to B$; 4. מפרקים כללים ארוכים ($A \to BX, X \to CD \Leftarrow A \to BCD$) וטרמינלים ($U \to a$).

גזירה: שמאלית – מחליפים תמיד את המשתנה השמאלי. ב-CNF גזירה של w היא בדיוק $2|w|-1$ צעדים. **רב-משמעי:** מילה עם שני עצי גזירה (שתי גזירות שמאליות).

דוגמה: ב-CNF $S \to aSb \mid \varepsilon$

$$S_0 \to AT \mid AB \mid \varepsilon$$
$$S \to AT \mid AB$$
$$T \to SB$$
$$A \to a$$
$$B \to b$$

במבחנים: 2025א מועד 95 שאלה 2ב (גם כששפת הדקדוק ריקה – עושים את השלבים); 2024ב מועד 65 שאלה 2ב (גזירה).

2.4 הוכחה שאינה חסרת-הקשר (למה 2.34)

הלמה: אם L חסרת-הקשר, יש p כך שכל $s \in L$, $|s| \geq p$, היא $uvxyz$ עם $|vxy| \leq p$, $|vy| > 0$, ו-$uv^ixy^iz \in L$ לכל $i \geq 0$.

1. נניח בשלילה; p; **בוחרים** s **שתלויה ב-**p ($a^pb^pc^p$).
2. לכל $s = uvxyz$, $|vy| > 0$, $|vxy| \leq p$:
3. **מקרים לפי מקום** vxy: הוא נוגע **לכל היותר בשני גושים שכנים**. אם ב-v או ב-y שתי אותיות שונות $\Leftarrow i = 2$ שובר את הסדר.
4. לכל מקרה i (0 או 2) שמוציא מהשפה. סתירה.

דרכים קצרות: $L \cap R$ (רגולרית) אינה חסרת-הקשר ($ww^Rw \cap a^*b^*a^*b^*$).

שפה	s	המקרה הקשה
$a^nb^nc^n$	$a^pb^pc^p$	vxy בשני גושים $\Leftarrow$ השלישי לא זז
$a^kb^{2k}c^k$	$a^pb^{2p}c^p$	$2p$ אותיות b מפרידות a מ-c
ww	$0^p1^p0^p1^p$	vxy באמצע $\Leftarrow$ החצאים שונים
$0^n1^{n^2}$	$0^p1^{p^2+1}$	v ב-0, y ב-1: $(p+s)^2 > p^2+t$
$0^n1^m2^n,\ m<n$	$0^{p+1}1^p2^{p+1}$	מנפחים את ה-1 $\Leftarrow m \geq n$

שימו לב: כל חלוקה. בין שני הגושים שסופרים – גוש **שלם** באורך p, כדי ש-vxy לא יגע בשניהם. מקרה "v בגוש אחד ו-y בגוש הבא" – מחשבים במפורש.

הקלאסיות: $a^nb^nc^n$ (2.36), ww, a^{n^2}, $a^ib^jc^k$ עם $j = \max(i,k)$, $0^n1^m2^n$ עם $m < n$.

במבחנים: 2026א מועד 82 שאלה 2א ($a^kb^{2k}c^k$); 2024ב מועד 94 שאלה 2ג ($0^p1^{p^2+1}$); 2025ב מועד 94 שאלה 2ג (המילה 0^p12^p0 **לא** מספיקה).

2.5 חסרת-הקשר או לא? בדיקה מהירה

השוואה אחת בכל פעם (מחסנית אחת) $\Leftarrow$ בדרך כלל כן; **שתי השוואות שלובות** ($a^nb^nc^n$, ww) $\Leftarrow$ לא. "$\neq$" הוא איחוד של שני מקרים $\Leftarrow$ לרוב כן. **"מה השפה של הדקדוק?"** – גוזרים כמה מילים קטנות, מנחשים, ומוכיחים בשני הכיוונים (דקדוק לא רגולרי יכול לתת שפה רגולרית: $\varepsilon \mid b$ נותן $S \to aBa,\ B \to BB \mid b$ (ab^*a).

2.6 סגירות ושפות קלאסיות

פעולה	חסרות-הקשר
$*, \cdot, \cup, L^R$	כן (דקדוקים)
$\cap$ רגולרית	**כן** – מכפלת PDA ו-DFA
$\cap$, משלים, $\setminus$	**לא**: $a^n b^n c^m \cap a^m b^n c^n = a^n b^n c^n$

שפה	רגולרית	חסרת-הקשר
$a^n b^n$, פלינדרומים, $\#_a = \#_b$, $a^i b^j \ (i \neq j)$	לא	כן
$\overline{ww}$,$\overline{a^n b^n c^n}$	לא	כן
$ww^R w$,ww ,$a^n b^n c^n$	לא	לא

היררכיית חומסקי (מדריך 2.4):

סוג	הכללים	השפות	המכונה
0	$\alpha \to \beta$ (בלי הגבלה)	מזוהות-טיורינג	TM
1	$\gamma \neq \varepsilon$,$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$	תלויות-הקשר	LBA
2	$A \to \gamma$	חסרות-הקשר	PDA
3	$A \to aB \mid a \mid \varepsilon$	רגולריות	DFA

DFA ← דקדוק סוג 3: משתנה לכל מצב; $q \xrightarrow{a} r \Rightarrow Q \to aR$; $q \in F \Rightarrow Q \to \varepsilon$.

במבחנים: 2024ב מועד 84 שאלה 2ד (חיתוך – דקדוקים לשתי השפות); 2024ב מועד 65 שאלה 2א; 2025ב מועד 66 שאלה 2ב.

3 חישוביות

3.1 מכונת טיורינג, גרסאות ומונים

TM (3.3): $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_{acc},q_{rej})$, $\delta: Q\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,R\}$. **קונפיגורציה** $u\,q\,v$ – הראש על האות הראשונה של v. **מכריעה** – עוצרת תמיד; **מזהה** – מקבלת בדיוק את L.

שקולות: רב-סרטית (3.13), לא דטרמיניסטית (3.16), מונה (3.21). **מונה ⇐ מזהה:** מריצים את המונה ומקבלים כשהמילה מודפסת.

מזהה ⇐ מונה: שלב i – i צעדים על $s_1..s_i$ (**במקביל**, לא אחת-אחת). מונה **בסדר** ⇔ כריעה.

תיאור מכונה במבחן: M = "על הקלט w: 1. ... 2. ..." – ברמת "מסמנים אות, נעים ימינה", והמכונה המינימלית.

במבחנים: 2024ב מועד 65 שאלה 4ב (קונפיגורציות על 01); 2025א מועד 92 שאלה 5.3; 2024ב מועד 84 שאלה 3ב (מונה בסדר).

3.2 הוכחה ששפה כריעה

1. **מכונה שמשתמשת במכריעים ידועים** (הטבלה): $A_{DFA}, E_{DFA}, EQ_{DFA}$ (4.1–4.5), A_{CFG}, E_{CFG} (4.7–4.8), A_{LBA} (5.9).
2. **פסקה: למה היא עוצרת תמיד.** 3. **פסקה: למה היא נכונה.**

טריקים: שאלה על שפה של ביטוי ⇐ DFA, מכפלה, EQ_{DFA}/E_{DFA}. "רצה לפחות k צעדים" ⇐ מספיק לבדוק קלטים באורך $\leq k$. "כותבת על סרט ריק" ⇐ $|Q|$ צעדים.

שימו לב: אלה תכונות של **הריצה**, לא של השפה – רייס **לא** חל עליהן.

3.3 סגירות של כריעות ומזוהות

פעולה	כריעות	מזוהות
$\cup$	כן	כן – **צעד-צעד במקביל**
$\cap$	כן	כן – אחת אחרי השנייה
$\cdot$, *	כן – כל החלוקות	כן – NTM מנחשת חלוקה (3.16)
משלים	כן	**לא** ($\overline{A_{TM}}$)
L^R	כן	כן

4.22: כריעה ⇔ מזוהה וגם המשלימה מזוהה. **הפרכה:** $\emptyset\subseteq A_{TM}\subseteq\Sigma^*$ – תת-קבוצה של כריעה לא בהכרח כריעה.

3.4 טבלת השפות הידועות

שפה	כריעה	מזוהה	משלימה מזוהה
A,E,EQ ל-DFA; A,E ל-CFG; A_{LBA}	כן	כן	כן
A_{TM} (4.11), $HALT_{TM}$ (5.1)	לא	כן	לא
E_{TM} (5.2), E_{LBA}, ALL_{CFG}, EQ_{CFG}	לא	לא	כן
$REGULAR_{TM}$ (5.3)	לא	–	–
EQ_{TM} (5.30)	לא	לא	לא

רעיונות ההוכחה: E_{DFA} – מסמנים מצבים נגישים; EQ_{DFA} – על ההפרש הסימטרי; A_{CFG} – CNF וכל הגזירות באורך $2n-1$; E_{CFG} – מסמנים משתנים שמייצרים טרמינלים; A_{LBA} – אחרי qng^n צעדים יש לולאה (5.9); E_{LBA}, ALL_{CFG} – **היסטוריות חישוב** מקבלות (5.10, 5.13).

3.5 רדוקציית מיפוי (הגדרה 5.20)

1. **שפה ידועה** A ו-$B \leq_m A$. 2. F = "על x: אם אינו קידוד חוקי – פלוט קבוע מתאים; אחרת – בנה M' ופלוט $\langle M' \rangle$". M' **מינימלית**: "על y: הרץ את M על w; ...". 3. f **חשיבה.** 4. $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$ **וגם** $f(x) \in B \Rightarrow x \in A$. 5. מסקנה.

f **חשיבה (5.17):** יש TM שעל כל w עוצרת עם $f(w)$ על הסרט. $A \leq_m B$ **(5.20):** $w \in A \iff f(w) \in B$.

כללים: B כריעה $\Leftarrow$ A כריעה (5.22); A לא כריעה $\Leftarrow$ B לא (5.23); B מזוהה $\Leftarrow$ A מזוהה (5.28); A לא מזוהה $\Leftarrow$ B לא (5.29). $A \leq_m B \iff \overline{A} \leq_m \overline{B}$. **לא סימטרי.** כל כריעה $\leq_m$ כל $B \neq \emptyset, \Sigma^*$.

דפוסים: אל $HALT$ – "דוחה" הופך ל"לולאה"; אל A_{TM} – "קבל אם עצרה"; $E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$: $\langle M, M_\emptyset \rangle$.

רדוקציה מ-A_{TM} אל	M' = **"על הקלט y: ..."**	$L(M')$
$\overline{E_{TM}}$ (כלומר E_{TM} לא כריעה)	אם $y \neq w$ דחה; אחרת הרץ M על w	$\{w\}$ או $\emptyset$
ALL_{TM} ($L = \Sigma^*$)	הרץ M על w, קבל אם קיבלה	Σ^* או $\emptyset$
$REGULAR_{TM}$ (5.3)	אם $y = 0^n1^n$ קבל; אחרת הרץ M על w	Σ^* או $\{0^n1^n\}$
$\lvert L(M) \rvert = 1$	אם $y = \varepsilon$ הרץ M על w; אחרת דחה	$\{\varepsilon\}$ או $\emptyset$
EQ_{TM}	הפלט $\langle M', M_{all} \rangle$, M' כמו ב-ALL_{TM}	

במבחנים: 2026א מועד 82 שאלה 3ב; 2025א מועד 64 שאלה 2ב; 2025ב מועד 66 שאלה 4 (טענות על $\leq_m$); 2026א מועד 96 שאלה 3ב.

3.6 אינה מזוהה, רייס ואלכסון

אינה מזוהה: $L \leq_m \overline{A_{TM}}$ (כלומר $\overline{L} \leq_m A_{TM}$), או: $\overline{L}$ מזוהה ו-L לא כריעה (4.22).

רייס (מדריך עמ' 148): תכונה **לא טריוויאלית** של **השפה** $L(M)$ – לא כריעה. לא חל על "מספר מצבים", "רצה k צעדים".

אלכסון (4.11): $D = \{s_i \mid M_i$ לא מקבלת את $s_i\}$; מראים ש-D במחלקה, ואז $s_j \in D \iff s_j \notin D$.

שימו לב: מונה **מזהה** – לא בהכרח מכריעה; "אין מונה כזה" מוכיחים באלכסון, לא ברייס.

במבחנים: 2026א מועד 82 שאלה 3 (אלכסון; $Loop(v)$ אינה מזוהה); 2025ב מועד 94 שאלה 4 (רייס); 2026א מועדים 88, 96 שאלה 3א (מונים).

4 סיבוכיות

4.1 המחלקות P, NP, coNP

P – זמן פולינומי. NP – **מוודא** פולינומי עם תעודה פולינומית (7.18) $\Leftrightarrow$ NTM פולינומית (7.20). $coNP$ – משלימים. $P \subseteq NP$; $P = NP$? פתוח. רב-סרטית $t \Leftarrow t^2$ (7.8); $2^{O(t)} \Leftarrow t$ NTM (7.11).

סגירות: P – הכול כולל משלים; NP – $\cdot, *, \cup, \cap$; משלים – פתוח.

המחלקות: רגולריות $\subsetneq$ חסרות-הקשר $\subsetneq P \subseteq NP \subsetneq$ כריעות $\subsetneq$ מזוהות.

שימו לב: מעבר על **כל** ההצבות / תת-הקבוצות – 2^n, לא פולינומי. מספר בקלט – באורך הבינארי: לבדוק $k \leq n$ לפני שמוסיפים k צמתים.

4.2 ב-P וב-NP

ב-P: אלגוריתם + זמן כל צעד + סכום פולינומי. **ידועות ב-P:** $PATH$ (BFS, 7.14), $RELPRIME$ (אוקלידס, 7.15), כל שפה חסרת-הקשר (תכנון דינמי, 7.16).

ב-NP: 1. **התעודה** (גודל פולינומי). 2. **המוודא** בודק אותה בזמן פולינומי. **coNP:** תעודה למשלים.

בעיה	התעודה	המוודא בודק
SAT, $3SAT$	הצבה	כל פסוקית מסופקת
$CLIQUE$ / IS / VC	k צמתים	כל הזוגות מחוברים / לא מחוברים / כל קשת מכוסה
$HAMPATH$, $LPATH$	סדר צמתים	שונים, קשתות קיימות, מתחיל ב-s ונגמר ב-t
$SUBSET\text{-}SUM$	תת-קבוצה	הסכום $= t$
3-צביעה	צבע לכל צומת	אין קשת חד-צבעית (או $1 \leq$ ב"כמעט")
מספר פריק	מחלק $1 < d < n$	$d \mid n$

4.3 NP-שלמות ו"לא ב-P (בהנחה $P \neq NP$)"

1. $C \in NP$. 2. B ידועה NP-שלמה. 3. $f : B \to C$ פולינומית, **ופלט חוקי** (3CNF וכו'). 4. $x \in B \iff f(x) \in C$ – **שני הכיוונים**, כולל המקרה השלילי.

לא ב-P: צעדים 2–4, ואז $C \in P \Leftarrow B \in P$ (7.31) – סתירה. **NP-קשה בלבד:** בלי צעד 1.

בעיה	ידוע NP-שלמה מ-	הגאדג'ט
SAT, $3SAT$	7.37, 7.42	–
$CLIQUE$	$3SAT$ (7.32)	צומת לכל ליטרל; קשת בין ליטרלים מפסוקיות שונות שאינם סותרים; $k =$ מספר הפסוקיות
VC, IS	7.44	$IS(G,k) = CLIQUE(\bar{G},k) = VC(G,n-k)$; מ-$3SAT$: קשת לכל משתנה, משולש לכל פסוקית, $k = n + 2m$
$HAMPATH$, $UHAMPATH$	7.46, 7.55	לא מכוון: כל צומת $\leftarrow u^{in}, u^{mid}, u^{out}$
$LPATH$	$UHAMPATH$	$k = n - 1$
$SUBSET\text{-}SUM$	7.56	–
$4SAT$	$3SAT$	$(C \vee z) \wedge (C \vee \bar{z})$
$CLIQUE$ גודל $n/2$	$CLIQUE$	צמתים אוניברסליים
3-צביעה "כמעט תקינה"	3-צביעה	$K_4 + G$

במבחנים: 2026א מועד 82 שאלה 4 (שכפול $\varphi \wedge \varphi$); 2024ב מועד 65 שאלה 3ב; 2025ב מועד 50 שאלה 3א; 2026א מועד 96 שאלה 4 (המקרה השלילי חייב טיפול).

5 טענות נפוצות – הוכיחו או הפריכו

5.1 שפות רגולריות וחסרות-הקשר

טענה		למה / דוגמה נגדית
כל שפה סופית רגולרית	כן	איחוד סופי של מילים
L^* רגולרית $\Leftarrow$ L רגולרית	לא	$L = \{0,1\} \cup \{0^n1^n\}$, $L^* = \Sigma^*$
AB רגולרית $\Leftarrow$ A רגולרית	לא	$A = \{0^n1^n\}$, $B = \Sigma^*$ ($\varepsilon \in A$)
תת-שפה של רגולרית – רגולרית	לא	$\{0^n1^n\} \subseteq \Sigma^*$
שינוי סופי משנה רגולריות	לא	$L = A \triangle D$, D סופית
לכל רגולרית DFA עם מספר זוגי של מצבים	כן	מוסיפים מצב לא נגיש
איחוד שתי לא-רגולריות – לא רגולרית	לא	$\{a^nb^n\} \cup \{a^ib^j : i \neq j\} = a^*b^*$
משלים של לא-רגולרית – לא רגולרית	כן	אחרת המקורית רגולרית
CFL $\cap$ רגולרית – CFL	כן	מכפלת PDA ו-DFA
CFL $\cap$ CFL, משלים, הפרש – CFL	לא	$a^nb^nc^m \cap a^mb^nc^n$
תת-שפה של CFL – CFL	לא	$\{a^nb^nc^n\} \subseteq \Sigma^*$
משלים של $a^nb^nc^n$ – CFL	כן	איחוד: $i \neq j$, $j \neq k$, סדר לא נכון

5.2 חישוביות וסיבוכיות

טענה		למה / דוגמה נגדית
תת-קבוצה של כריעה – כריעה	לא	$\emptyset \subseteq A_{TM} \subseteq \Sigma^*$
כל שפה סופית כריעה	כן	טבלה סופית
L מזוהה $\Leftarrow$ L^*, L_1L_2 מזוהות	כן	NTM מנחשת חלוקה (3.16)
L כריעה $\Leftarrow$ L^R כריעה	כן	הופכים את הקלט ומריצים
משלים של מזוהה – מזוהה	לא	$\overline{A_{TM}}$ (4.23)
$A \leq_m B \Leftarrow B \leq_m A$	לא	$a^*b^* \leq_m A_{TM}$, לא להפך
A כריעה $\Leftarrow$ $A \leq_m B$ לכל $B \neq \emptyset, \Sigma^*$	כן	f מכריעה ופולטת $y \in B$ או $n \notin B$
"יש קלט שעליו M רצה k צעדים" כריעה	כן	מספיק קלטים באורך $\leq k$; רייס לא חל
B NP-שלמה ו-$P \in B \Leftarrow P = NP$	כן	7.35
$C \notin P \Leftarrow C \in NP$	לא	$P \subseteq NP$
$A \leq_P B$ ו-$A \in P \Leftarrow B \in P$	לא	הרדוקציה מעבירה קושי מ-A ל-B, לא קלות
$PATH \leq_m A_{TM}$	כן	כל כריעה $\leq_m A_{TM}$