תשובות למבחן מספר 10: סמסטר 2026א', 4 בפברואר 2026, שאלון 516, מועד 82

תשובה לשאלה 1:

שאלה 1 סעיף א':

סוג השאלה: בניית אוטומט לשפה מתוארת (R1). לפי התבנית: מה האוטומט צריך לזכור ← מצב לכל דבר שזוכרים ← מעברים ← מצבים מקבלים ← בדיקה.

שלב ראשון – נפרק את המילה לחלקים. מילה בשפה נראית כך: aa בהתחלה, אחר כך אמצע x כלשהו, ובסוף abc:

$$w = aa \cdot x \cdot abc$$

האורך הוא $|w| = 2 + |x| + 3 = |x| + 5$. כדי שהאורך יהיה זוגי, **האמצע x צריך להיות באורך אי-זוגי**.

> **שימו לב – חפיפה!** ה-a השני של ההתחלה aa יכול להיות גם ה-a של הסוף abc. כך מתקבלת המילה $aabc$: היא מתחילה ב-aa, מסתיימת ב-abc, ואורכה 4 – זוגי. לכן היא בשפה, למרות שאין לה אמצע בכלל. אוטומט שבונה רק $aa \cdot x \cdot abc$ מפספס אותה.

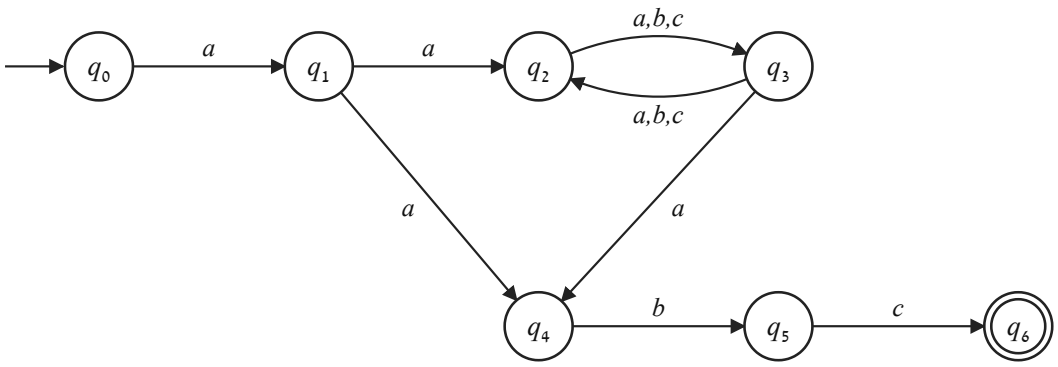
(חפיפה גדולה יותר אי אפשר: aa ו-abc חולקים לכל היותר אות אחת, כי $ab \neq aa$.) לכן:

$$L = \{aabc\} \cup \{aa \cdot x \cdot abc \mid x \in \Sigma^*,\ |x| \text{ אי-זוגי}\}$$

שלב שני – מה צריך לזכור. כמה מההתחלה aa כבר קראנו; את הזוגיות של אורך האמצע; וכמה מהסוף abc כבר קראנו. כאן נוח אוטומט לא דטרמיניסטי: הוא "מנחש" מתי מתחיל הסוף abc.

שלב שלישי – המצבים והמעברים:

- $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2$ – קריאת aa.
- q_2 ו-q_3 סופרים את אורך האמצע: ב-q_2 קראנו מספר זוגי של אותיות אמצע, וב-q_3 מספר אי-זוגי. כל אות מעבירה ביניהם.
- מ-q_3 (אמצע באורך אי-זוגי) מנחשים שמתחיל הסוף: $q_3 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{b} q_5 \xrightarrow{c} q_6$.
- **החפיפה:** מעבר נוסף $q_1 \xrightarrow{a} q_4$ – ה-a השני של aa הוא גם ה-a של abc.
- q_6 הוא המצב המקבל היחיד, ואין ממנו מעברים.



בכתיב פורמלי, האוטומט הסופי הלא דטרמיניסטי הוא החמישייה $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, כאשר:

1. $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ היא קבוצת המצבים,
2. $\Sigma = \{a, b, c\}$ הוא אלפבית הקלט,
3. $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ היא פונקציית המעברים, הנתונה בטבלה שלהלן,
4. $q_0 \in Q$ הוא המצב ההתחלתי,
5. $F = \{q_6\} \subseteq Q$ היא קבוצת המצבים המקבלים.

	a	b	c	ε
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2, q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_6\}$	$\emptyset$
q_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

שלב רביעי – נימוק. האוטומט מקבל מילה רק במסלול שמגיע ל-q_6, ויש שני מסלולים כאלה:

1. דרך $q_1 \to q_4$: קוראים בדיוק a, a, b, c – המילה $aabc$.
2. דרך q_2, q_3: קוראים aa, אחר כך אמצע שמסתיים ב-q_3, כלומר באורך אי-זוגי, ואחר כך abc – מילה $aa \cdot x \cdot abc$ עם $|x|$ אי-זוגי.

אלה בדיוק שני החלקים של L משלב ראשון.

בדיקה:

- $aabc$ – מתקבלת (המסלול q_0, q_1, q_4, q_5, q_6).
- $aaaabc$ (אורך 6, האמצע a) – מתקבלת.
- $aaabc$ (אורך 5, אי-זוגי) – לא מתקבלת: האמצע ריק, ולכן נשארים ב-q_2, ומ-q_2 אין מעבר לסוף.

שאלה 1 סעיף ב׳:

סוג השאלה: ביטוי רגולרי לשפה מתוארת (R2). לפי התבנית: מפרקים את השפה למקרים, כותבים ביטוי לכל מקרה, ומאחדים.

שלב ראשון – המקרים. במילה יש גם sts וגם tst. אחד מהם מופיע ראשון (מתחיל קודם):

- **בלי חפיפה:** sts ואחריו tst, או tst ואחריו sts, וביניהם כל דבר: $sts\,\Sigma^*\,tst$ או $tst\,\Sigma^*\,sts$.
- **עם חפיפה:** שני הרצפים חולקים אותיות.
  - **חפיפה של שתי אותיות:** sts מסתיים ב-ts, ו-tst מתחיל ב-ts. לכן הם יכולים לחלוק את ה-ts: $ststst$ – יש בה sts (מהאות הראשונה) וגם tst (מהאות השנייה). באותו אופן $tststs = tsts$.
  - **חפיפה של אות אחת אי אפשר:** sts מסתיים ב-s ו-tst מתחיל ב-t (וההפך).

> **שימו לב – חפיפה!** בלי המקרים $ststst$ ו-$tsts$ הביטוי לא מכיל, למשל, את המילה $ststst$, למרות שהיא בשפה (השאלה אומרת במפורש "מותרת חפיפה").

שלב שני – הביטוי. לפני ואחרי – כל מילה: $\Sigma^* = (s \cup t)^*$

נקבל אפוא את התשובה הסופית:

$$\Sigma^*\left(ststst \;\cup\; tsts \;\cup\; sts\,\Sigma^*\,tst \;\cup\; tst\,\Sigma^*\,sts\right)\Sigma^* \qquad \text{כאשר } \Sigma = (s \cup t)$$

נימוק. כל מילה שהביטוי מתאר מכילה את אחד מארבעת החלקים שבסוגריים, ובכל אחד מהם יש sts וגם tst. בכיוון השני: אם במילה יש sts וגם tst, נסתכל על הרצף שמתחיל קודם. אם השני מתחיל אחריו ולא חופף לו – זה המקרה $tst\,\Sigma^*\,sts$ או $sts\,\Sigma^*\,tst$. אם הם חופפים – החפיפה היא בדיוק של שתי אותיות (שלב ראשון), כלומר $ststst$ או $tsts$.

תשובה לשאלה 2:

שאלה 2 סעיף א':

סוג השאלה: הוכחה ששפה אינה חסרת-הקשר (C5), בעזרת למת הניפוח לשפות חסרות-הקשר (משפט 2.34 בספר).

הוכחה. נניח בשלילה ש-L חסרת-הקשר, ויהי p אורך הניפוח שלה. נבחר את המילה

$$s = a^p\, b^{2p}\, c^p \in L \qquad (|s| = 4p \geq p)$$

לפי הלמה, אפשר לכתוב $s = uvxyz$ כך ש: **(1)** $uv^i xy^i z \in L$ לכל $i \geq 0$; **(2)** $|vy| > 0$; **(3)** $|vxy| \leq p$. נראה שכל חלוקה כזו נכשלת, לפי המקום של vxy:

- vxy **לא נוגע גם ב-a וגם ב-c:** בין ה-a האחרון ל-c הראשון יש $2p$ אותיות b, ולכן תת-מילה באורך $p \leq$ לא יכולה להכיל גם a וגם c.
- **מקרה 1 – v ב- או y ב- יש שתי אותיות שונות:** אז ב-uv^2xy^2z האותיות לא בסדר $a \dots b \dots c$ (למשל $v = ab$ נותן $\dots abab \dots$), והמילה לא ב-L.
- **מקרה 2 – v ו-y כל אחד מאות אחת, ואין בהם c:** אז vy מוסיף רק a-ים ו/או b-ים. ב-uv^2xy^2z מספר ה-c-ים נשאר p, אבל מספר ה-a-ים או מספר ה-b-ים גדל. אם גדל מספר ה-a-ים – $\#a \neq \#c$; אם גדל רק מספר ה-b-ים – $\#b > 2p = 2 \cdot \#c$. בשני המקרים המילה לא ב-L.
- **מקרה 3 – v ו-y כל אחד מאות אחת, ויש בהם c:** אז אין בהם a (הם לא נוגעים גם ב-a וגם ב-c). ב-uv^2xy^2z מספר ה-c-ים גדל ומספר ה-a-ים נשאר p, ולכן $\#a \neq \#c$, והמילה לא ב-L.

בכל מקרה $uv^2xy^2z \notin L$, בסתירה לתנאי **(1)**. לכן L אינה חסרת-הקשר. ■

שאלה 2 סעיף ב׳:

סוג השאלה: בניית דקדוק חסר-הקשר (C1). לפי התבנית: מה צריך ״להתאים״ זה לזה, ומה חופשי.

הרעיון. $|w| > |u|$ פירושו: w ארוך מ-u באות אחת לפחות. לכן נכתוב $w = w_1 w_2$ כאשר $|w_2| = |u|$ ו-$|w_1| \geq 1$. החלק w_2 ״מתאים״ ל-u באורך – בונים אותו מבחוץ פנימה, אות משמאל ל-c ואות מימין ל-c (כמו $a^n b^n$). החלק w_1 הוא לפחות אות אחת נוספת משמאל.

הדקדוק:

$$S \to XSX \mid XS \mid Xc$$
$$X \to a \mid b$$
$$G = (\{S, X\},\ \{a, b, c\},\ R,\ S)$$

כאשר R הם הכללים שלמעלה, ו-S משתנה ההתחלה (הגדרה 2.2).

נימוק. X יוצר אות אחת מ-Σ.

- **כל מילה שהדקדוק יוצר היא ב-L_1:** כל צעד $S \to XSX$ מוסיף אות אחת משמאל ל-c ואחת מימינו. כל צעד $S \to XS$ מוסיף אות רק משמאל. הגזירה מסתיימת ב-$S \to Xc$, שמוסיף עוד אות משמאל. אם השתמשנו k פעמים ב-XSX ו-m פעמים ב-XS, אז $|u| = k$ ו-$|w| = k + m + 1 > |u|$.
- **כל מילה ב-L_1 נוצרת:** תהי wcu עם $|u| = k < |w|$. נשתמש $|w| - k - 1$ פעמים ב-XS (לאותיות הראשונות של w), אחר כך k פעמים ב-XSX (שמכסות את k האותיות האחרונות לפני Xc ואת u), ובסוף Xc. כל X מוחלף באות הנכונה.

תשובה לשאלה 3:

שאלה 3 סעיף א':

סוג השאלה: הוכחה ששפה / אוסף אינם קיימים – שיטת האלכסון (כמו בהוכחה ש-A_{TM} אינה כריעה, משפט 4.11).

> **שימו לב:** אי אפשר להסתפק בטענה "קבוצת המכונות המכריעות אינה ניתנת לזיהוי". מונה מתאים למכונה **שמזהה** שפה, לא בהכרח מכריעה, ולכן טענה כזו לא מוכיחה כאן דבר. צריך לבנות שפה כריעה ש-E "מפספס".

הוכחה. נניח בשלילה שקיים מונה E כזה. יהיו $s_1, s_2, s_3, \ldots$ כל המילים מעל $\{0,1\}$ בסדר הקנוני (לפי אורך, ובאותו אורך לפי סדר מילוני), ויהי M_i המכונה ה-i-ית ש-E מדפיס. נגדיר:

$$D = \{\, s_i \mid M_i \text{ לא מקבלת את } s_i \,\}$$

E מדפיס אינסוף מכונות. יש אינסוף שפות כריעות מעל $\{0,1\}$ (למשל $\{s_1\}, \{s_2\}, \ldots$). לכל אחת מהן E מדפיס מכונה, ולמכונה יש שפה אחת בלבד. לכן E מדפיס אינסוף תיאורים.

D כריעה. המכונה T מכריעה אותה:

T = "על הקלט w:

1. מצא את i כך ש-$w = s_i$ (עוברים על המילים בסדר הקנוני).
2. הרץ את E עד שהדפיס i תיאורים, ויהי $\langle M_i \rangle$ התיאור ה-i-י.
3. הרץ את M_i על s_i. אם M_i קיבלה – **דחה**; אם דחתה – **קבל**."

T עוצרת תמיד: שלב 1 מסתיים כי w מופיעה במקום סופי ברשימה; שלב 2 מסתיים כי E מדפיס אינסוף תיאורים; שלב 3 מסתיים כי M_i מכריעה (דרישה 2). ו-T מקבלת בדיוק את המילים s_i ש-M_i לא מקבלת – כלומר את D.

הסתירה. D שפה כריעה מעל $\{0,1\}$, ולכן לפי דרישה 3 יש j כך ש-$L(M_j) = D$. נשאל אם $s_j \in D$:

$$s_j \in D \iff M_j \text{ לא מקבלת את } s_j \iff s_j \notin L(M_j) = D$$

סתירה. לכן לא קיים מונה כזה. ■

שאלה 3 סעיף ב':

התשובה: לא. לכל מילה v, השפה $Loop(v)$ איננה מזוהה-טיורינג.

סוג השאלה: הוכחה ששפה אינה מזוהה-טיורינג (T4) – רדוקציית מיפוי משפה שידוע שאינה מזוהה-טיורינג (מסקנה 5.29: אם $A \leq_m B$ ו-A אינה מזוהה-טיורינג, אז גם B אינה מזוהה-טיורינג).

השפה שממנה נעשה רדוקציה – $\overline{HALT_{TM}}$. $HALT_{TM}$ אינה כריעה (משפט 5.1) והיא מזוהה-טיורינג (מריצים את M על w ומקבלים אם עצרה). לפי משפט 4.22, אם גם המשלימה שלה הייתה מזוהה-טיורינג, $HALT_{TM}$ הייתה כריעה. לכן $\overline{HALT_{TM}}$ אינה מזוהה-טיורינג.

הרדוקציה $\overline{HALT_{TM}} \leq_m Loop(v)$. תהי v מילה כלשהי. הפונקציה f:

F = "על הקלט x:

1. אם x אינו קידוד חוקי $\langle M, w\rangle$ – פלוט $\langle M_\infty\rangle$, מכונה שלא עוצרת על אף קלט.
2. אחרת $x = \langle M, w\rangle$: פלוט את $\langle M'\rangle$, כאשר M' = "על הקלט y: הרץ את M על w." "

M' מתעלמת מהקלט שלה, ולכן היא עוצרת על v אם ורק אם M עוצרת על w. F רק כותבת תיאור של מכונה, ולכן f חשיבה.

נכונות:

- אם x אינו קידוד חוקי: $x \in \overline{HALT_{TM}}$, וגם $f(x) = \langle M_\infty\rangle \in Loop(v)$.
- אם $x = \langle M, w\rangle$:

$$\langle M, w\rangle \in \overline{HALT_{TM}} \iff w \text{ לא עוצרת על } M \iff M' \text{ לא עוצרת על } v \iff \langle M'\rangle \in Loop(v)$$

לכן $\overline{HALT_{TM}} \leq_m Loop(v)$, ולפי מסקנה 5.29, $Loop(v)$ אינה מזוהה-טיורינג – וזה לכל מילה v. ■

תשובה לשאלה 4:

שאלה 4 סעיף א':

התשובה: $HALF\text{-}3SAT \in P$. למעשה, **כל** נוסחה ב-3cnf שייכת לשפה.

טענה. לכל הצבה τ, נסמן ב-$\bar{\tau}$ את ההצבה ההפוכה (כל משתנה מקבל את הערך ההפוך). אז כל פסוקית מסופקת על ידי τ או על ידי $\bar{\tau}$.

הוכחה. אם פסוקית לא מסופקת על ידי τ, כל הליטרלים בה שקר תחת τ. תחת $\bar{\tau}$ כל ליטרל מקבל את הערך ההפוך – כלומר כולם אמת, ובפרט הפסוקית מסופקת.

מסקנה. אם בנוסחה m פסוקיות, מספר הפסוקיות ש-τ מספקת ועוד מספר הפסוקיות ש-$\bar{\tau}$ מספקת הוא לפחות m. לכן אחת משתי ההצבות מספקת לפחות $m/2$ פסוקיות, כלומר לפחות מחצית.

האלגוריתם:

M = "על הקלט $\langle\varphi\rangle$: בדוק ש-φ היא נוסחה חוקית ב-3cnf. אם כן – **קבל**; אחרת – **דחה**."

הבדיקה היא מעבר אחד על הקלט, ולכן הזמן פולינומי (לינארי) באורך הקלט. לכן $HALF\text{-}3SAT \in P$.

> **שימו לב:** אלגוריתם שעובר על כל ההצבות האפשריות **אינו פולינומי** – יש 2^n הצבות ל-n משתנים. הטענה מראה שאין צורך לחפש בכלל.

שאלה 4 סעיף ב':

סוג השאלה: הוכחה ששפה אינה ב-P (בהנחה $P \neq NP$) על ידי רדוקציה פולינומית משפה NP-שלמה. אם $A \leq_P B$ ו-$B \in P$, אז $A \in P$ (משפט 7.31).

הרדוקציה $3SAT \leq_P FIRST\text{-}HALF\text{-}3SAT$. הפונקציה f:

F = "על הקלט x:

1. אם x אינו קידוד של נוסחה ב-3cnf – פלוט נוסחה קבועה שאינה בשפה, למשל $(y \vee y \vee y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{y} \vee \bar{y}) \wedge (y \vee y \vee y)$: המחצית הראשונה שלה היא $y \wedge \bar{y}$, ואין הצבה שמספקת אותה.
2. אחרת $x = \langle\varphi\rangle$, ל-$\varphi$ יש m פסוקיות: פלוט $\langle\varphi'\rangle$ כאשר $\varphi' = \varphi \wedge \varphi$ – הפסוקיות של φ, ואחריהן שוב אותן פסוקיות."

זמן: F מעתיקה את הנוסחה פעמיים – זמן לינארי.

נכונות. ב-φ' יש $2m$ פסוקיות, והמחצית הראשונה שלהן היא בדיוק m הפסוקיות של φ. לכן:

$$\begin{aligned}\langle\varphi\rangle \in 3SAT &\iff \varphi \text{ יש הצבה שמספקת את כל} \\ &\iff \varphi' \text{ יש הצבה שמספקת את המחצית הראשונה של} \\ &\iff \langle\varphi'\rangle \in FIRST\text{-}HALF\text{-}3SAT\end{aligned}$$

המסקנה. $3SAT$ היא NP-שלמה (מסקנה 7.42). אילו $3SAT \in P$, אז $P = NP$ (משפט 7.35). לכן, בהנחה $P \neq NP$, $3SAT \notin P$. אילו $FIRST\text{-}HALF\text{-}3SAT \in P$, הרדוקציה ומשפט 7.31 היו נותנים $3SAT \in P$ – סתירה. לכן $FIRST\text{-}HALF\text{-}3SAT \notin P$. ■