

נוסחאות ונתונים בחשבון אינפיניטסימלי 2

קורס 20475 עודכן ב-2022'

(נכתב על ידי דניאל וונג)

תוכן העניינים

<u>נושא</u>	<u>עמוד</u>	<u>נושא</u>	<u>עמוד</u>
יחידה 1 : האינטגרל המסוים	1	יחידה 5 : טורים	5
יחידה 2 : שיטות אינטגרציה	2	יחידה 6 : סדרות וטורים של פונקציות	6-7
יחידה 3 : האינטגרל המוכלל	3	יחידה 7 :	8
יחידה 4 : פיתוחי טיילור ומקלורן	4	חשבון דיפרנציאלי של פונקציות בשני משתנים	

ביבליוגרפיה

N Ltd, (2020). נבלה. אוחר מתוך <http://www.nabla.hr>.

ליבוביץ, ד', לוי, א', ברגר, ש', דכטר, ר', טאומן, י', שקד, נ', . . . גרינשטיין, ו'. (2016). חשבון אינפיניטסימלי 2 (כרך א). רעננה : האוניברסיטה הפתוחה.

ליבוביץ, ד', לוי, א', ברגר, ש', דכטר, ר', טאומן, י', שקד, נ', . . . גרינשטיין, ו'. (2016). חשבון אינפיניטסימלי 2 (כרך ב). רעננה : האוניברסיטה הפתוחה.

ליבוביץ, ד', לוי, א', ברגר, ש', דכטר, ר', טאומן, י', שקד, נ', . . . גרינשטיין, ו'. (2016). חשבון אינפיניטסימלי 2 (כרך ג). רעננה : האוניברסיטה הפתוחה.

1 האינטגרל המסוים

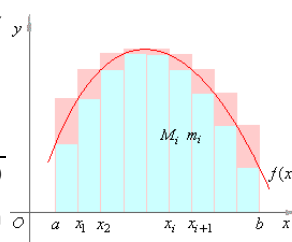
1.1 משפחות של פונקציות אינטגרביליות

הגדרה 1.8: פונקציה f חסומה ב-

$[a, b]$, אם האינטגרל התחתון שלה בקטע שווה לאינטגרל העליון שבה בו,

כלומר f אינטגרבילית ב- $[a, b]$ אם:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$$



משפט 1.10: פונקציה חסומה f היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ אם

ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ יש חלוקה P שעבורה מתקיים:

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

משפט 1.15 (אינטגרביליות הפונקציות המונוטוניות): אם f

מונוטונית במובן הרחב בקטע $[a, b]$, אז f אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

משפט 1.17: כל פונקציה f שהיא חסומה ומונוטונית למקוטעין

בקטע $[a, b]$, היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

משפט 1.18 (אינטגרביליות הפונקציות הרציפות): אם f רציפה

בקטע $[a, b]$, אז f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

משפט 1.19: פונקציה f שחסומה בקטע $[a, b]$ ורציפה בכל קטע פרט

למספר סופי של נקודות, היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

1.2 תכונות של פונקציות אינטגרביליות

משפטים 1.20 ו-1.23 (אדיטיביות):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

משפט 1.24 (ליניאריות):

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

למה 1.25: אינטגרל של שתי פונקציות שמתלכדות בקטע פרט למספר סופי של נקודות, זהה.

בתנאים אלו האינטגרל $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ מתכנס.

1.3 פונקציה קדומה והנוסחה היסודית

הגדרה 1.12 (פונקציה קדומה): כל פונקציה $F(x)$ המקיימת

$F'(x) = f(x)$ בקטע I , נקראת הפונקציה הקדומה של f בקטע.

משפט 1.13 (הנוסחה היסודית): תהי f אינטגרבילית ב- $[a, b]$

ו- F הפונקציה הקדומה שלה אז:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

1.4 הערכת אינטגרל מסוים

משפט 1.26 (מונוטוניות): אם f ו- g אינטגרביליות

בקטע $[a, b]$ ואם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in [a, b]$, אז:

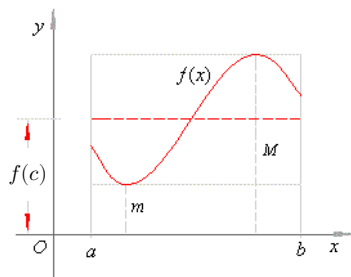
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

משפט 1.29 (הערך הממוצע של החשבון

האינטגרלי): אם f רציפה בקטע $[a, b]$, כאשר $a \neq b$,

אז קיים $c \in [a, b]$ כך ש:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$



שאלה 51: אם f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$

ומתקיים $m \leq f(x) \leq M$, אז:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

1.5 אינטגרל בלתי מסוים

הגדרה 1.30 (אינטגרל בלתי מסוים): תהי f

אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ותהי $c \in [a, b]$.

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

המוגדרת בקטע $[a, b]$, מכונה אינטגרל בלתי מסוים

של f בקטע $[a, b]$.

משפט 1.32: כל אינטגרל בלתי מסוים של f בקטע

$[a, b]$ היא פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$.

1.6 המשפט היסודי

משפט 1.33 (המשפט היסודי של החשבון

האינפיניטסימלי):

תהי f רציפה בקטע $[a, b]$ ותהי

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

אז F_a גזירה בקטע $[a, b]$ ולכל x בקטע מתקיים:

$$F'_a(x) = f(x)$$

2 שיטות אינטגרציה

2.1 משפחות הפונקציות הקדומות

הגדרה 2.1 (אוסף כל הפונקציות הקדומות):

$$\int f(x) dx = \{F(x) : F'(x) = f(x), x \in I\}$$

משפט 2.2 (כל הפונקציות הקדומות נבדלות בקבוע):

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

הגדרה 2.3 (הגדרת פונקציות אלמנטריות): עמוד 116 יחידה 2.

משפט 2.5 (אינטגרציה של פונקציות $f(\alpha x + \beta)$):

אם $\int f(x) dx = F(x) + C$, אז עבור $\alpha \neq 0$:

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$$

משפט 2.6 (אינטגרציה בחלקים):

$$\int uv' = uv - \int vu'$$

2.2 גורמים ריבועיים לא פריקים

2.3.10: עמוד 163 יחידה 2.

משפט 2.7 (חילוק עם שארית של פולינומים):

$$f(x) = \frac{7x^9 - 2x^5 - 3x^3}{x^4 + x^2 + 1}$$

נבצע חילוק פולינומים עם שארית לפי משפט 2.7:

$$\begin{aligned} & \frac{7x^5 - 7x^3 - 2x}{7x^9 - 2x^5 - 3x^3} \cdot |x^4 + x^2 + 1| \\ & \frac{7x^9 + 7x^7 + 7x^5}{-7x^7 - 9x^5 - 3x^3} \\ & \frac{-7x^7 - 7x^5 - 7x^3}{-2x^5 + 4x^3} \\ & \frac{-2x^5 - 2x^3 - 2x}{6x^3 + 2x} \end{aligned}$$

$$f(x) = 7x^5 - 7x^3 - 2x + \frac{6x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}$$

טכניקת השלמה לריבוע: $x^2 \pm ax = (x \pm \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2$

כאשר מחלקים את a ב-2.

$$g(x) = \frac{6x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}$$

נבדוק האם אפשר לפרק את המכנה לגורמים ליניאריים,

אבל מתקיים ש- $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$, לכן נשתמש בטכניקה

להשלמה לריבוע: נסמן, $\varphi = x^2$,

$$\varphi^2 + \varphi + 1 = \left(\varphi + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(\varphi + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

אינטגרציה של פונקציות רציונליות, משפט 2.9:

גורם ליניארי $(x - c)^k$ "תורם" סכום מהצורה:

$$\frac{a_1}{x - c} + \frac{a_2}{(x - c)^2} + \dots + \frac{a_k}{(x - c)^k}$$

גורם ריבועי $(x^2 + px + q)^l$ "תורם" סכום מהצורה:

$$\frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{a_l x + b_l}{(x^2 + px + q)^l}$$

2.3 אינטגרל מסוים

הערה: באינטגרל מסוים יש חשיבות לתחום ההגדרה של האינטגרנד.

משפט 2.10 (אינטגרציה בחלקים לאינטגרלים מסוימים):

$$\int_a^b u \cdot v' = u \cdot v|_a^b - \int_a^b u' \cdot v$$

משפט 2.11 (כלל ההצבה לאינטגרלים מסוימים):
ראו הערה א' והערה ד' עמ' 168-169 יחידה 2.

$f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$, אז:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

בתנאים:

א. φ רציפה ובעלת נגזרת רציפה ב- $J = [\alpha, \beta]$ (או $[\beta, \alpha]$).

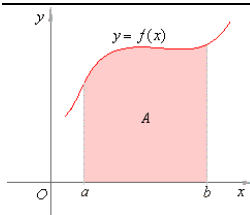
ב. $\varphi(J) \subseteq [a, b]$.

ג. $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

2.4 אינטגרל כמייצג שטח

פרק 1.5 – עמוד 69:

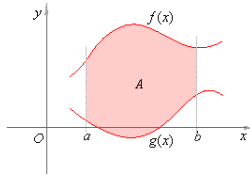
שטח של פונקציה רציפה ואי-שלילית בקטע $[a, b]$.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

דוגמה 1.17 – עמוד 73:

שטח בין שתי פונקציות רציפות $f(x)$ ו- $g(x)$ בין שתי נקודות התלכדות סמוכות a ו- b .



$$S = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|$$

2.5 סימטריות ומחזוריות

טענות:

נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה וקטע סימטרי $[-a, a]$.
א. שאלה 43: אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, אז

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

ב. (צריך להוכיח) אם $f(x)$ פונקציה זוגית, אז

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

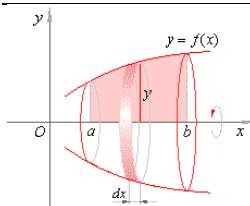
נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה ומחזורית בעלת מחזור p אז לכל $[a, b]$ מתקיים:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx$$

2.6 נפח גוף סיבוב

פרק 1.4 – עמוד 60:

נפח שנוצר מסיבוב השטח שנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה- x סביב ציר ה- x בקטע $[a, b]$.



$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

3 האינטגרל המוכלל

3.1 הגדרה

נתבונן באינטגרל $\int_a^b f(x) dx$ כאשר a או b נקודות בעייתיות. כלומר, $f(x)$ לא חסומה באותה נקודה בעייתית.

נתייחס למקרה שבו $f(x)$ אינה חסומה ב- b .

א. צריך ש- $f(x)$ תהיה אינטגרלית בכל קטע $[a, t]$, $a \leq t < b$.

ב. נחשב $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$. ואם קיבלנו מספר סופי אז אומרים שהאינטגרל המוכלל מתכנס, אחרת הוא מתבדר.

הערות:

א. ניתן לחשב אינטגרל מוכלל רק עם נקודה בעייתית אחת. במידה ויש יותר מנקודה בעייתית אחת, נפצל את הקטע למספר קטעים כך שבכל קטע תהיה רק נקודה אחת בעייתית והיא בקצה הקטע. האינטגרל יתכנס רק אם האינטגרל מתכנס בכל אחד מהקטעים.

ב. ∞ תמיד נקודה בעייתית.

ג. עמוד 8 ביחידה 3: אם פונקציה $f(x)$ שמוגדרת בקטע $(a, b]$ וחסומה בו. והרחבה כלשהי של $f(x)$ לקטע $[a, b]$ היא פונקציה אינטגרלית, אז $f(x)$ אינטגרלית בקטע $(a, b]$ וזהו אינטגרל מסוים.

3.2 מבחני התכנסות

משפטים 3.5 ו- 3.16

אם $0 \leq f(x) \leq g(x)$ בסביבת הנקודה הבעייתית והן אינטגרליות בכל קטע סופי שאינו מכיל נקודה זו אז:

- אם $\int f$ מתכנס $\Leftarrow \int g$ מתכנס.
- אם $\int f$ מתבדר $\Leftarrow \int g$ מתבדר.

משפטים 3.5* ו- 3.16*

אם $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות אי-שליליות ואינטגרליות בכל קטע סופי שאינו מכיל את הנקודה הבעייתית, נניח a , נחשב $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

- אם L סופי וחיובי אז $\int f$ ו- $\int g$ מתכנסים יחד ומתבדרים יחד.
- אם $L = 0$ ו- $\int g$ מתכנס אז גם $\int f$ מתכנס.
- אם $L = \infty$ ו- $\int g$ מתבדר אז גם $\int f$ מתבדר.

מבחן דיריכלה – משפט 3.19

תהייה f ו- g פונקציות רציפות בקטע $[a, \infty)$.

תנאים על f :

- א. f מונוטונית יורדת בקטע $[a, \infty)$.
- ב. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- ג. f בעלת נגזרת רציפה בקטע $[a, \infty)$.

תנאי על g :

הפונקציה $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ חסומה בקטע $[a, \infty)$.

בתנאים אלו האינטגרל $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ מתכנס.

התהליך הקלאסי של דיריכלה (דוגמה 3.12 עמוד 37):

שלב א': אי שוויון + זווית כפולה. $\Leftarrow$ שלב ב': התכנסות / התבדרות.

שלב ג': הנחה בשלילה (סכום / הפרש). $\Leftarrow$ שלב ד': משפט 3.16 נסיק התבדרות.

סיכום: האינטגרל הנתון מתכנס, אך אינו מתכנס בהחלט ולכן הוא מתכנס בתנאי.

חישוב צד על מנת להשתמש במשפט 3.5* / 3.16* סעיף א' $\Leftrightarrow$:

$$\text{נתון: } \int_0^\infty \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^2} dx$$

נרצה לבדוק כיצד מתנהגת הפונקציה $\arctan x$ בסביבת $x = 0$,

כלומר לאיזה פונקציה מהצורה x^n שקולה הפונקציה $\arctan x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x^n} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-1}}$$

מסקנה:

$n < 1$: הגבול יהיה שווה לאפס. $[n = 1]$: הגבול יהיה שווה לאחד.

$n > 1$: גבול אינסופי.

3.3 פונקציות נפוצות להשוואה

למה 3.12: יהי $b > 0$. האינטגרל

$$\int_b^\infty \frac{1}{x^\alpha}$$

מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$.

למה 3.2 + שאלה 5: האינטגרלים

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}, \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

מתכנס אם ורק אם $\alpha < 1$.

הערה: אם מקבלים לבדוק התכנסות $\int f(x) dx$ בעזרת 3.5 או 3.16:

התכנסות: $\int f(x) \leq \dots \leq g(x)$ מתכנס.

התבדרות: $\int f(x) \geq \dots \geq g(x)$ מתבדר.

3.4 התכנסות אינטגרנד שאינו שומר סימן

אינטגרליות בהחלט ובתנאי

הגדרה 3.6 ו- 3.17

אם האינטגרל $\int |f(x)| dx$ מתכנס, אז האינטגרל $\int f(x) dx$ מתכנס בהחלט.

אם האינטגרל $\int f(x) dx$ מתכנס, אך האינטגרל $\int |f(x)| dx$ מתבדר, אז האינטגרל $\int f(x) dx$ מתכנס בתנאי.

משפט 3.7 ו- 3.18

אם $\int |f(x)| dx$ מתכנס, אז גם $\int f(x) dx$ מתכנס.

שאלה 50 מיחידה 1:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

3.5 שלבי עבודה בבדיקת התכנסות אינטגרל מוכלל

א. זיהוי נקודות בעייתיות.

ב. בחירת השיטה / המבחן לבדיקת ההתכנסות.

אם הפונקציה שומרת סימן, כלומר חיובית או שלילית אז נשתמש במבחני ההשוואה 3.5 / 3.16 או 3.5* / 3.16*.

אם הפונקציה לא שומרת סימן, אז לבדוק אם יש אפשרות לשים ערך מוחלט ולפתור.

אם לא מצליחים עם ערך מוחלט, אז משתמשים במבחן דיריכלה.

אם לא מצליחים עם מבחן דיריכלה, אז עושים לפי ההגדרה.

ג. סיכום.

שאלה 33: אם $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס וקיים הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ (סופי או אינסופי) אז } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

סעיף 3.2.6: דוגמה לפונקציה שלא קיים לה גבול, אך

$$\int_a^\infty f(x) dx \text{ הוא אינטגרל מתכנס.}$$

4 פיתוחי טיילור ומקלורן

4.1 הגדרה

הגדרה 4.2: תהי f גזירה n פעמים בנקודה a , הפולינום

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

נקרא פולינום טיילור מסדר n של f בנקודה a .

הגדרה 4.3: בהמשך להגדרה 4.2

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{השארית ה-} n \text{-ית}$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{פיתוח טיילור}$$

כאשר $a = 0$, זהו פולינום מקלורן.

4.2 פיתוח טיילור

פיתוחים ידועים – פיתוחי מקלורן (עמודים 64-67)

(פיתוח מקלורן כאשר נקודת הפיתוח היא $a = 0$):

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \quad f(x) = e^x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x) \quad f(x) = \sin x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n}(x) \quad f(x) = \cos x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_n(x) \quad f(x) = \ln(1+x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x) \quad f(x) = (1+x)^\alpha$$

שאלות חשובות:

שאלה 12: פיתוח מקלורן של פולינום הוא הפולינום עצמו.

שאלה 13 + 21: פיתוח מקלורן של $f(x) = \frac{1}{1-x}$

שאלה 14: הקשר בין פיתוח טיילור של פונקציה לפיתוח של הנגזרת.

שאלה 15: סכום / הפרש וכפל בסקר של פולינומי טיילור.

שאלה 16: הצבה של $(-x)$ בפולינום מקלורן.

שאלה 19 ג': פיתוח של $\tan x$ עד לסדר 3.

שאלה 2 א' עמ' 93: הצבה בפיתוח מקלורן פולינום שמתאפס ב- $x = 0$.

4.3 דרך עבודה במציאת פיתוח / פולינום טיילור

א. פונקציה לפיתוח: $f(x)$

ב. נקודת הפיתוח: a

ג. סדר הפיתוח: n

ד. יש למצוא:

עבור פיתוח יש למצוא $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

עבור פולינום יש למצוא $P_n(x)$

4.4 פונקציית השארית $R_n(x)$

משפט 4.4 – הצגת השארית בצורת לגראנז'

תהי f גזירה $n+1$ פעמים בקטע I המכיל את a ,

כאשר ξ בין a ל- x , אזי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

משפט 4.5 – הצגת השארית בצורת קושי.

משפט 4.6 – הצגת השארית בצורה כללית.

משפט 4.7: השארית מקיימת:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

משפט 4.8: אם פולינום $P(x)$ מקיים

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

אז $P(x)$ הוא פולינום טיילור של f .

4.5 פיתוחים של מכפלה והרכבה

משפט 4.1 סעיף ב' – נוסחת לייבניץ:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

תזכורת מאינפי 1 – הגדרה 7.34:

נאמר ש- $g = o(f)$ בסביבת a אם

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

4.6 דרך עבודה בחישוב מקורב בעזרת פיתוח טיילור

א. פונקציה לפיתוח: $f(x)$

ב. נקודת הפיתוח: a

ג. סדר הפיתוח: n

ד. יש למצוא:

למצוא n כך ש- g שגיאה מקסימלית $|R_n(x)| \leq$

עבור פיתוח $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

עבור פולינום $P_n(x)$

5 טורים

5.1 הגדרה

הגדרה 5.1: מסדרה (a_n) בונים טור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

5.2 התכנסות / התבדרות (תקף גם עבור טור שמתחיל מ $n = n_0$)

סכום חלקי של טור:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$$

הגדרה 5.2: אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת לגבול סופי, נאמר שהטור מתכנס. ואז סכום הטור הוא:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

אם הגבול אינו סופי, נאמר שהטור מתבדר.

הגדרה 5.3: אם $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \infty$, נאמר שהטור מתבדר לאינסוף (ובדומה למינוס אינסוף).

משפט 5.5 תנאי הכרחי להתכנסות: אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

5.3 חישוב הטור ובדיקת התכנסות

דרכים לחישוב טורים:

1. טור טלסקופי: עמודים 108 – 109.

2. טור גיאומטרי: עמודים 111 – 112.

סדרה גיאומטרית (הנדסית):

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ סכום חלקי: } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

אם $|q| \geq 1$: הטור מתבדר.

$$\text{אם } |q| < 1: \text{ הטור מתכנס וסכום הטור: } S = \frac{a_1}{1-q}$$

3. טור חזקות: עמודים 107 – 110 ויחידה 6.

פעולות עם טורים:

משפטים 5.9 ו-5.10: פעולות אריתמטיות על טורים.

משפט 5.11: הכנסת סוגריים בטור מתכנס.

משפט 5.12: הוספת מספר סופי של איברים לא משנה את התכנסות הטור.

5.4 מבחני התכנסות לטורים חיוביים

משפט 5.14 – מבחן ההשוואה הראשון:

בהינתן 2 טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$ כך ש- $0 \leq a_n \leq b_n$ לכל n אז

אם הטור $\sum b_n$ מתכנס אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.

אם הטור $\sum a_n$ מתבדר אז הטור $\sum b_n$ מתבדר (לאינסוף).

משפט 5.15 – מבחן ההשוואה השני:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}, \text{ נחשב } b_n > 0 \text{ לכל } n, a_n \geq 0$$

אז הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

שאלה 21 משלימה את המשפט עבור גבול ∞ או 0.

5.5 מבחני התכנסות של קושי ודאלמבר

מבחן השורש של קושי:

משפט 5.16: אם קיים $q < 1$ כך ש- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ כמעט לכל n אז הטור מתכנס.

אם $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ עבור אינסוף ימים הטור מתבדר.

$$\text{משפט 5.16** / 5.16: } c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} / c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ יהי}$$

אם $c < 1$ הטור מתכנס, אם $c > 1$ הטור מתבדר.

מבחן המנה של דאלמבר:

משפט 5.17: אם $a_n \neq 0$ לכל n , ואם קיים $q < 1$

$$\text{כך ש- } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \text{ כמעט לכל } n, \text{ אז הטור מתכנס.}$$

$$\text{אם } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \text{ כמעט לכל } n, \text{ אז הטור מתבדר.}$$

$$\text{משפט 5.17** : יהי } c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ אם } c < 1 \text{ הטור מתכנס.}$$

אם $c > 1$ הטור מתבדר.

5.6 מבחן ההתכנסות האינטגרלי

משפט 5.19: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ יורדת.

והפונקציה $f(x) \geq 0$ יורדת (במובן הרחב) שמוגדרת

ב- $[1, \infty)$. מקיימת $f(n) = a_n$. בנתונים אלה הטור

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"ם האינטגרל המוכלל

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

5.7 מהתכנסות בהחלט ובתנאי

משפט 5.6: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס אז גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס.}$$

הגדרה 5.7: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אומרים

שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

הגדרה 5.8: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר והטור

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

בתנאי.

5.8 טור לייבניץ

משפט 5.20 – משפט לייבניץ: אם (a_n) סדרה יורדת

ואפסה של מספרים אי שליליים אז:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס.

ב. סכום הטור S נמצא בין 2 סכומים עוקבים

$$S_{n+1} \text{ ו- } S_n.$$

ג. שארית הטור מקיימת: $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

5.9 מבחן דיריכלה ומבחן אבל

הגדרה 5.21: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא חסום אם סדרת

הסכומים החלקיים שלו חסומה.

משפט 5.22 – מבחן דיריכלה: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור

חסום והסדרה (b_n) מונוטונית ואפסה, אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ מתכנס.}$$

משפט 5.23 – מבחן אבל: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס

והסדרה (b_n) מונוטונית וחסומה, אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ מתכנס.}$$

שאלה 33 סעיף א': הטורים $\sum \cos k\theta, \sum \sin k\theta$

כאשר $n \in \mathbb{Z}, \theta \neq 2\pi n$.

הערה: בטורי דיריכלה מהצורה

$$\sum a_k \cos k\theta, \sum a_k \sin k\theta$$

בדיקת התכנסות והתכנסות בהחלט מתבצעת באותו

האופן שבדקנו באינטגרל מוכלל.

5.10 שאלות תיאורטיות

משפט 5.4 – מבחן קושי: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N כך שלכל $n > N$

טבעי ולכל p טבעי מתקיים

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

משפט 5.24: הקשר בין התכנסות טור האיברים

החיוביים והשליליים של טור נתון לבין התכנסות

בהחלט ובתנאי.

משפט 5.25 ומשפט 5.26: שינוי סדר איברים בטור

שמתכנס בהחלט אינו משנה את סכום הטור.

משפט 5.27 – משפט רימן על טורים מתכנסים בתנאי.

5.11 חשוב

למה 5.13.

דוגמא 5.8 עמוד 136.

שאלה 27 עמוד 136.

6 סדרות וטורים של פונקציות

6.1 התכנסות סדרה של פונקציות

הגדרה 6.1 – התכנסות נקודתית: אם סדרת פונקציות (f_n) מתכנסת נקודתית בקטע I אז הפונקציה הגבולית היא:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

הגדרה 6.2 – התכנסות במידה שווה: סדרת פונקציות (f_n) מתכנסת במידה שווה בקטע I לפונקציה f

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

לכל $x \in I$.

שאלה 5: התכנסות במידה שווה גוררת התכנסות נקודתית.

למה 6.3: הסדרה (f_n) מתכנסת במידה שווה בקטע I אם ורק אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

משפט 6.4: אם סדרת פונקציות (f_n) רציפות ב- I ומתכנסת במידה שווה לפונקציה f , אז f רציפה ב- I .

משפט 6.5 – משפט דיני: סדרת פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ ומתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה f . אם סדרה עולה לכל $x \in [a, b]$ אז f_n מתכנסת במידה ל- f .

הערה: משפט דיני, נכון גם אם (f_n) סדרה יורדת.

שאלה 7: הסדרה (f_n) מתכנסת במידה שווה ל- f אם ורק אם קיימת סדרת מספרים a_n כך שכמעט לכל $n: |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0$.

6.2 שלבי עבודה בבדיקת סדרת פונקציות מתכנסת במידה שווה

א. למצוא פונקציית הגבול $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (אם לא לכל $x \in D$ קיים הגבול, אז כמובן אין התכנסות במידה שווה של (f_n) ב- D).

ב. אם (f_n) רציפות ב- D ו- $f(x)$ לא רציפה ב- D , אז אין התכנסות במידה שווה של (f_n) ב- D (זה נובע ממשפט 6.4).

(II) אם קיימת סדרת מספרים $a_n \rightarrow 0$ כך ש- $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ לכל $x \in D$, אז (f_n) מתכנסת במידה שווה ל- f ב- D (זה נובע משאלה 7).

(III) אם קיימת סדרת נקודות $(x_n) \subset D$ כך ש- $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0$, אז אין התכנסות במידה שווה של (f_n) ב- D (זה נובע ממשפט 6.3).

ג. אם לא הצלחנו להגיע למסקנה על סמך סעיף ב' הנייל, אז נחשב

$$c_n = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$$

לפי למה 6.3 (f_n) מתכנסת במידה שווה ל- f ב- D אם ורק אם $c_n \rightarrow 0$.

הערה נוספת: לא לשכוח את משפט דיני 6.5, הוא יכול לעזור לנו לבדוק התכנסות במידה שווה בדרך פשוטה וקצרה.

6.3 טורים של פונקציות

עבור סדרת פונקציות (u_n) מגדירים טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ אם לכל

$x_0 \in I$ טור מספרים זה מתכנס אז נגדיר לכל $x \in I$ את הפונקציה הגבולית:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

בדיקת התכנסות:

הגדרה 6.2: נגדיר סכום חלקי $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ אם (S_n) מתכנס ל- u

במידה שווה בקטע I , אז הטור $u(x)$ מתכנס במידה שווה ל- u .

הערה: אם ניתן לחשב סכום חלקי, הרי ש- (S_n) היא סדרת פונקציות וניתן להשתמש בבדיקת התכנסות של סדרת פונקציות. בנימוק להתכנסות נציין בנוסף את הגדרה 6.2.

משפטים אנלוגיים: 6.4' ו-6.5' ששם הדרישה של מונוטוניות סדרת הפונקציות מוחלפת בדרישה שסדרת הפונקציות u_n הן אי-שליליות.

משפט 6.7 – מבחן ויישטראס: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

מתכנס במידה שווה ב- I , אם מתקיימים התנאים:

א. קיימת סדרת מספרים a_n כך ש- $|u_n(x)| \leq a_n$ לכל n ו- $x \in I$.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (בהחלט).

6.4 יישומים של התכנסות במ"ש

אינטגרציה:

משפט 6.8: סדרת פונקציות רציפות שמתכנסות במ"ש ל- f בקטע $[a, b]$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

משפט 6.8: טור של פונקציות רציפות שמתכנסות במ"ש בקטע $[a, b]$, אז

שמתכנסות במ"ש בקטע $[a, b]$, אז

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx$$

גזירה:

משפט 6.9: פונקציות גזירות ברציפות ב- $[a, b]$.

(f_n) מתכנסת נקודתית לפונקציה f . סדרת הנגזרות (f'_n) מתכנסת במ"ש, אז

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

משפט 6.9: פונקציות גזירות ברציפות ב- $[a, b]$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס נקודתית ל- u . טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ מתכנס במ"ש, אז

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

6.5 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

לטור חזקות יש רדיוס התכנסות R , כלומר

עבור $|x| < R$: הטור מתכנס.

עבור $|x| > R$: הטור מתבדר.

עבור $|x| = R$: יש לבדוק ישירות בהצבה.

טור כללי מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ לטור חזקות

שכזה יש רדיוס התכנסות R סביב a .

הערה: על ידי הצבה $t = x - a$ ניתן להגיע לטור חזקות סטנדרטי.

מציאת רדיוס התכנסות:

משפט 6.10 (נוסחת קושי הדמר):

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

למה 6.11 (נוסחת דאלמבר):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

שלבי העבודה בטורי חזקות:

א. להגיע לטור חזקות סטנדרטי.

ב. מציאת רדיוס התכנסות.

ג. בדיקת התכנסות בקצוות.

ד. תחום התכנסות הטור.

6.6 פעולות עם טורי חזקות

משפט 6.12: נגדיר $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, כאשר לטור החזקות יש רדיוס

התכנסות $R > 0$, אז

א. f רציפה ב- $(-R, R)$.

ב. f אינטגרלית ב- $[-r, r]$, $0 < r < R$, ולכל $x \in (-R, R)$ מתקיים

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ג. f בעלת נגזרת רציפה בקטע $(-R, R)$ ומתקיים

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

הטורים המתקבלים בסעיפים ב' ו-ג' בעלי רדיוס התכנסות R .

6.7 תוצאות כלליות על טורי חזקות

תחום ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ הוא קטע בעל קצוות $\pm R$,

כאשר רדיוס ההתכנסות R קובעים לפי הנוסחה במשפט 6.10 או לפי למה 6.11.

ההתכנסות בקצוות $\pm R$ יש לבדוק בנפרד, בעזרת הכלים שלמדנו ביחידה 5.

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R ,

ותהי $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

ה"מנה" הראשונה של התוצאות (על סמך משפטים 6.10 ו-6.12):

א. הטור מתכנס במ"ש בקטע $[-r, r]$ לכל $0 < r < R$.

ב. הפונקציה $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים (ולכן גם רציפה) ב- $(-R, R)$.

ג. נתין לגזור את הטור איבר-איבר ב- $(-R, R)$ ולבצע אינטגרציה

איבר-איבר בכל קטע $[a, b] \subset (-R, R)$, לטור הנגזרות ולטור

האינטגרלים (כאשר מדובר באינטגרל בלתי מסוים) יש אותו

רדיוס התכנסות R .

תוצאות אלו נכונות גם כאשר $R = \infty$.

משפט 6.13 – משפט אבל:

טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R והוא מתכנס בנקודה $x = R$, אז $f(x)$ רציפה משמאל ב- R . כלומר

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = f(R)$$

או

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

משפט 6.14 – יחידות הפיתוח:

אם $f(x)$ ניתנת לפיתוח לטור חזקות ב- $(-a, a)$, אז $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, אז f גזירה אינסוף פעמים בקטע

ולכל $n \geq 0$ מתקיים:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

משפט 6.15 – תנאי הכריח ומספיק לפיתוח טור חזקות.

ה"מנה" השנייה של התוצאות (על סמך ה"מנה"

הראשונה, משפט אבל 6.13 והערות לאחר הוכחת משפט

אבל): יהי רדיוס ההתכנסות R מספר סופי וחיובי, אז:

א. אם הטור מתכנס עבור $x = R$ אז $f(x)$ רציפה ב-

$(-R, R]$ וניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר בכל

קטע $[a, b] \subset (-R, R]$.

ב. אם הטור וטור הנגזרות שלו מתכנסים שניהם עבור

$x = R$ אז ניתן לגזור את הטור איבר-איבר ב-

$(-R, R]$.

ג. אם הטור מתכנס עבור $x = R$ אז הוא מתכנס

במ"ש ב- $[-r, R]$ לכל $0 < r < R$.

ד. אם הטור מתבדר עבור $x = R$ אז הוא לא מתכנס

במ"ש ב- (a, R) לאף $-R < a < R$.

ה. הטור מתכנס במ"ש בתחום התכנסותו אם ורק אם

הוא מתכנס בקצוות התחום.

תוצאות דומות למסקנות א-ד נכונות גם לגבי $x = -R$

7 פונקציות בשני משתנים

7.5 תנועה על משטח

משפט 7.69: אם $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית

בנקודה (x_0, y_0) אז הנגזרת הכיוונית מקבלת את ערכה המקסימלי בכיוון הגרדיאנט ואת ערכה המינימלי בכיוון המנוגד לגרדיאנט, והיא מתאפסת בכיוון הניצב לגרדיאנט.

שאלה 46: אם $\underline{v} = (a, b)$ הוא וקטור יחידה אז וקטורי היחידה הניצבים ל- $\underline{v}$ הם: $(b, -a)$ או $(-b, a)$.

7.6 כלל השרשרת

ההרכבה שבעמוד 68: פונקציה בשני משתנים: $g(x, y)$. פונקציה במשתנה אחד: $f(t)$. מתקיים: $t_0 = g(x_0, y_0)$. ההרכבה: $F(x, y) = f(g(x, y))$. פונקציה בשני משתנים. נגזרות חלקיות:

$$F_x(x, y) = f'(g(p_0)) \cdot g_x(p_0)$$

$$F_y(x, y) = f'(g(p_0)) \cdot g_y(p_0)$$

משפט 7.66: פונקציה בשני משתנים: $f(x, y)$. פונקציה במשתנה אחד: $y(t), x(t)$. מתקיים:

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \text{ ההרכבה:}$$

$$F(t) = f(x(t), y(t)) \text{ פונקציה במשתנה אחד.}$$

$$\text{הנגזרת: } F'(t) = f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t)$$

משפט באתר הקורס:

$$\text{בקצרה: } F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

נגזרות חלקיות:

$$F_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u$$

$$F_v = f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v$$

משפט 7.71: אם קיימת סביבה של p_0 שבה $f_{yx} = f_{xy}$ קיימות ורציפות בנקודה אז מתקיים $f_{xy}(p_0) = f_{yx}(p_0)$

7.7 מציאת נקודות הקיצון

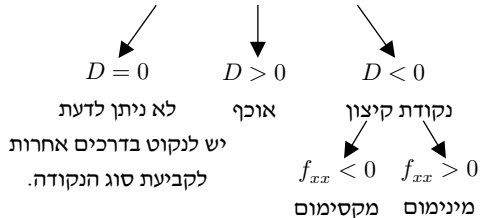
שלב א': פותרים מערכת משוואות $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$

ומקבלים נקודות חשודות כקיצון.

שלב ב': מחשבים את הביטוי $D = f_{xx}^2 - f_{xy} \cdot f_{yx}$

שלב ג': קביעת סוג הנקודה, מציבים כל נקודה ב- D

ומקבלים מספר



הערה: יש לבדוק גם את הנקודות שעבורן לא קיימת נגזרת חלקית.

7.8 מינימום ומקסימום בתחום

שלב א': מוצאים נקודות חשודות כקיצון.

שלב ב': מחשבים קיצון בשפת התחום, מעבר למשתנה 1

שלב ג': נקודות מיוחדות. הקצוות של התחום.

שלב ד': חישוב ערכו של הפונקציה בכל אחת מהנקודות שמצאנו, הנקודה בעל הערך הגבוה ביותר הוא המקסימום והנמוך ביותר הוא המינימום.

7.1 גבולות ורציפות

הגדרה 7.39 – הגדרת הגבול ל- ε .

הגדרה 7.40 – הגדרת הגבול לפי היינה.

משפט 7.41 – אריתמטיקה של גבולות.

משפט 7.42 – כלל הסנדוויץ'.

משפט 7.43 – כלל ההרכבה.

הגדרה 7.44 – רציפות בנקודה

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

משפט 7.45 – אריתמטיקה של פונקציות רציפות.

משפט 7.46 – הרכבת פונקציות רציפות.

משפט 7.51 – המשפט הראשון של וירשטראס.

משפט 7.53 – המשפט השני של וירשטראס.

הגדרה 7.54: בהינתן $f(x, y)$ המוגדרת בנקודה (x_0, y_0) ובסביבתה, נגדיר נגזרת חלקית בכיוון x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

נגזרת חלקית בכיוון y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

הערות:

א. הפונקציות $f_x(x, y)$ ו- $f_y(x, y)$ פונקציות של 2 משתנים.

ב. אין קשר בין קיום נגזרות חלקיות לבין רציפות הפונקציה $f(x, y)$.

7.2 דיפרנציאביליות

הגדרה 7.62 – דיפרנציאביליות:

אומרים שהפונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $p_0 = (x_0, y_0)$ אם לכל

(x, y) בסביבה מסוימת של (x_0, y_0) מתקיים:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + r(x, y)$$

כאשר A, B קבועים ומתקיים

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varepsilon(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{r(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

משפט 7.63 – תנאי הכרחי: אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה p_0 אז מתקיים

$$A = f_x(x_0, y_0), B = f_y(x_0, y_0)$$

משפט 7.65 – תנאי מספיק: אם $f_x(x, y)$ ו- $f_y(x, y)$ קיימות ורציפות ב- p_0

אזי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- p_0 .

שאלה 43: דיפרנציאביליות גוררת רציפות.

7.3 מישור משיק למשטח

הגדרה 7.64: משוואת המישור המשיק לפונקציה $z = f(x, y)$ בנקודה

$$z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) : (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

7.4 נגזרת מכוונת וגרדיאנט

הגדרה 7.68 – גרדיאנט: אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה p_0 , מסמנים

$$\text{grad} f(p_0) = \nabla f(p_0) = (f_x(p_0), f_y(p_0))$$

הגדרה 7.59 – נגזרת מכוונת: יהי $\underline{v} = (v_1, v_2)$ וקטור יחידה $(v_1^2 + v_2^2 = 1)$.

הנגזרת המכוונת של f בכיוון של $\underline{v}$ בנקודה $p_0 = (x_0, y_0)$ מוגדרת על ידי:

$$D_{\underline{v}} f(p_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + t\underline{v}) - f(p_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

במידה והגבול קיים וסופי.

משפט 7.67: אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה p_0 וקטור יחידה אז:

$$D_{\underline{v}} f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \underline{v} = f_x(p_0)v_1 + f_y(p_0)v_2$$